Coleman 積分論と
その p 進多重ゼータ値への応用について

古賀　真輝

2022 年 5 月 26 日

目次

この解説で用いる記号・用語

- 環：単位元をもつ可換環
- 非可換環：単位元をもつ，非可換な環
- 体：可換体
- p：素数
- $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, ...\}$：1 以上の整数全体の集合
- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_m) \in \mathbb{Z}^m_{>0}$：多重指数
- $|\ |_p$：$\mathbb{C}_p$ の標準的な乗法付値，$|p|_p = p^{-1}$
- $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p \leq 1\}$
- $\mathfrak{m} = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < 1\}$：$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の唯一の極大イデアル
- K：標数 0 の完備非アルキメデス的体
- $\mathcal{V}$：K の整数環
- κ：K の剰余体
- A^{rig}：rigid 解析空間の構造層[*1]
- Grp：群の圏
- $\mathsf{Mod}(R)$：環 R 上加群の圏
- $\mathsf{Vec}(K)$：体 K 上有限次元ベクトル空間の圏
- $\mathsf{Alg}(K)$：体 K 上代数の圏
- $\mathsf{Mod}(V)$：rigid 解析空間もしくはスキーム V 上の $\mathcal{O}_V$ 加群の圏
- $\mathsf{Coh}(V)$：rigid 解析空間もしくはスキーム V 上の連接 $\mathcal{O}_V$ 加群の圏
- $\mathsf{Conn}(V)$：rigid 解析空間もしくはスキーム V 上の可積分連接接続の圏
- $\mathsf{Conn}(j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[})$： 可積分 $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}$-接続の圏
- $\mathsf{Isoc}^\dagger(T), \mathsf{Isoc}^\dagger(X_0)$：rigid triple T, κ スキーム X_0 上の過収束 isocrystal の圏
- $\mathsf{Un}^\dagger(X_0)$：X_0 上の可積分 unipotent isocrystal の圏
- $\mathsf{Un}(X_K, D_K)$：D_K に対数的特異点をもつ X_K 上の 可積分 unipotent 接続の圏

[*1] 基本的な流儀と同様に $\mathcal{O}$ を用いることも多いが，特に代数的なものと区別したい際にはこちらを用いる

1　本解説の概略

本書は，p 進積分論の 1 つである Coleman 積分論と，p 進多重ゼータ値の定義と性質（特に複シャッフル関係式）についての解説である．

第 2 章では，いくつかの準備をおこなう．必要となる unipotent isocrystal や淡中圏に関する事実を復習する．

第 3 章では，Coleman 積分論を扱う．3.1 節で Coleman 積分論の発端となった Coleman [Col82] による定式化（定理 3.4）を紹介したあと，3.2 節では Besser [Bes02] による淡中圏を用いた解釈を紹介する．Coleman による定式化では $\mathbb{P}^1$ 上の積分に限られていたものが，Besser による方法では高次元に拡張されている．さらに 3.3 節では， Besser-Furusho [BF06] による Coleman 関数の接基点への解析接続について紹介する．同じ論文で導入された代数的起源の Coleman 関数（定義 3.66）の積分理論について詳細を述べた．

第 4 章では，p 進多重ゼータ値（以下 pMZV）$\zeta_p(\mathbf{a})$ を扱う．まず 4.1 節では，複素多重ゼータ値（以下 MZV）$\zeta(\mathbf{a})$ のいくつかの性質を簡単に紹介する．4.2 節では，MZV の p 進類似である pMZV を定義する（定義 4.22，定義 4.59）．MZV がポリログ $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ の $z \to 1$ の極限として与えることができる点に着目し，pMZV を p 進ポリログ $\mathrm{Li}^{\varpi}_{\mathbf{a}}(z)$ のある種の極限として定義する．この p 進ポリログは，Coleman 積分論を用いて $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 上の Coleman 関数として定義されている．また，pMZV は，KZ 方程式（定義 4.24）の 2 つの基本解の差である p 進 Drinfel'd associator $\Phi^{\varpi}_{\mathrm{KZ}}$ を母関数にもつ．KZ 方程式の基本解や $\Phi^{\varpi}_{\mathrm{KZ}}$ の直接的な表示を紹介し（定理 4.34，定理 4.39），pMZV の関係式の 1 つであるシャッフル積公式（定理 4.41，[Fur04]）

$$\zeta_p(\mathbf{a})\zeta_p(\mathbf{b}) = \zeta_p(\mathbf{a} \sqcup\!\sqcup \mathbf{b})$$

の証明を紹介する（但し $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は admissible な指数）．4.3 節では続いて，pMZV の調和積公式（定理 4.62，[BF06]）

$$\zeta_p(\mathbf{a})\zeta_p(\mathbf{b}) = \zeta_p(\mathbf{a} * \mathbf{b})$$

の証明を紹介する．そのために，Coleman 関数として $\mathcal{M}_{0,5}$ 上で定義された二重ポリログ $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(x, y)$ の関係式を考える．調和積公式は，その二重ポリログの関係式を $\mathcal{M}_{0,5}$ の接空間に解析接続することで示される．シャッフル積公式と調和積公式から，直ちに複シャッフル関係式（定理 4.63）

$$\zeta_p(\mathbf{a} \sqcup\!\sqcup \mathbf{b}) = \zeta_p(\mathbf{a} * \mathbf{b})$$

を得る．

本書を読むにあたって必要な事項は第 2 章にまとめているが，それ以前の前提として代数幾何やリジッド幾何の用語や概念に馴染みがあることが必要であろう．また，Coleman 積分と pMZV については，[原 19] で基礎的なことを学ぶことができる．これは大変読みやすくそして詳しい解説記事であり，それを読んでからそれに続く内容として本書を読むのがもっとも良いであろう．

誤りなどありましたら，古賀真輝までご連絡ください．ホームページ http://mkmath.net/ のお問い合わせ欄などでも構いません．

2 準備

2.1 接続と unipotent isocrystal

2.1.1 rigid 解析空間上の接続

ここでは，K を標数 0 の非自明な付値をもつ完備非アルキメデス的体，$\mathcal{V}$ をその整数環，κ を剰余体とする．V を K 上の rigid 解析空間とする．

定義 2.1. 連接 $\mathcal{O}_V$ 加群 E と層の射 $\nabla : E \to E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V$ であって，加法的で Leibniz 則

$$\nabla(fe) = e \otimes df + f \cdot \nabla(e) \quad \forall\, e \in E, f \in \mathcal{O}_V$$

が成り立つものの組 (E, ∇) のことを**接続**という．**今後，断りのない限り，接続は連接加群に対してのみ考える**．

接続 (E, ∇) に対して，∇ によって，各 $i = 0, 1, 2, ...$ に対して，

$$E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^i_V \xrightarrow{\nabla \otimes \mathrm{id}} (E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V) \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^i_V \xrightarrow{\sim} E \otimes_{\mathcal{O}_V} (\Omega^1_V \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^i_V) \to E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^{i+1}_V$$

が誘導される．これも $\nabla : E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^i_V \to E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^{i+1}_V$ とかく．接続 $(E, \nabla), (E', \nabla')$ に対して，接続の射 $f : (E, \nabla) \to (E', \nabla')$ とは，$\mathcal{O}_V$ 線形写像 $f : E \to E'$ であって，$\nabla' \circ f = (f \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla$ が成り立つもののことをいう．

$\nabla^2 = \nabla \circ \nabla : E \to E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^2_V$ が 0 写像である接続を**可積分接続**という．**以後，断りのない限り，接続は可積分であるとする**．$\mathsf{Conn}(V)$ を V 上の可積分接続のなす圏とする．

補題 2.2 ([Ber96, PROPOSITION(2.2.3)])**.** 可積分接続は，有限局所自由層である．

自明な接続とは，$\mathbb{1} = (\mathcal{O}_V, d)$ の有限直和のことをいう．さらに，接続が **unipotent** とは，自明な接続から繰り返し拡大して得られる接続のことをいう．すなわち，

- 自明な接続は unipotent である．
- $\mathsf{Conn}(V)$ の完全列

  $$0 \to T \to E \to F \to 0 \quad (T \text{ は自明な接続})$$

  があるときに，F が unipotent なら E が unipotent である．

として帰納的に定義したものである．

補題 2.3. V が affinoid で，E が V 上の unipotent 接続であるならば，E は $\mathcal{O}_V$ 加群として自由である．

証明. V が affinoid であることから

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_V) = H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$$

である．したがって，unipotent 接続を構成する完全列から帰納的に主張が従う． □

命題 2.4. V を affinoid とし，E を V 上の unipotent 接続とする．補題 2.3 より E は $\mathcal{O}_V$ 加群として自由であるが，その rank を n とする．このとき，適当な基底 $e_1, ..., e_n$ をとると，冪零上三角行列（対角成分が全て 0 の上三角行列）$B \in M_n(\Omega_V^1)$ を用いて

$$\nabla \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とかける．

証明. n の帰納法で示す．階数 1 の unipotent 接続は $(\mathcal{O}_V, d)$ に他ならず，$B = 0$ として主張は正しい．

E_1 を自明な接続，E_2 を unipotent 接続として完全列

$$0 \to E_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi_2} E_2 \to 0 \tag{2.1}$$

があるとする．このとき，冪零上三角行列 B を用いて

$$\nabla_{E_2} e_2 = de_2 + Be_2$$

とかけているとする．E, E_1, E_2 は $\mathcal{O}_V$ 加群として自由であるので，完全列 (2.1) は split する．$\pi_1 \circ i = \mathrm{id}_{E_1}$ となる $\pi_1 : E \to E_1$ をとる．加群として $E = E_1 \oplus E_2$ とかける．$e_1 \in E_1, e_2 \in E_2$ に対して，

$$\nabla_E(e_1, 0) = \nabla_E(i(e_1)) = (i \otimes \mathrm{id})(\nabla_{E_1}(e_1)) = (\nabla_{E_1}(e_1), 0) = (de_1, 0) \tag{2.2}$$

$$(\pi_2 \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla_E(0, e_2) = \nabla_{E_2}(\pi_2(0, e_2)) = \nabla_{E_2}(e_2) \tag{2.3}$$

であり，また，$k \in \mathcal{O}_V, e_2 \in E_2$ に対して，

$$\begin{aligned}(\pi_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla_E(0, ke_2) &= (\pi_1 \otimes \mathrm{id})((0, e_2) \otimes dk + k \cdot \nabla_E(0, e_2)) \\ &= (\pi_1 \otimes \mathrm{id})(k \cdot \nabla_E(0, e_2)) \\ &= k \cdot (\pi_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla_E(0, e_2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

である．(2.4) は，$(\pi_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla_E$ が E_2 成分については $\mathcal{O}_V$ 線形であることを意味している．(2.2),(2.3),(2.4) より

$$\nabla_E \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & * \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

とかける．$\begin{pmatrix} O & * \\ O & B \end{pmatrix}$ は冪零上三角行列であり，E に対しても主張が成り立つ． □

2.1.2 isocrystal

定義 2.5. rigid triple とは，3 つ組 $T = (X_0, Y_0, P)$ であって，

- P が $\mathcal{V}$ 形式スキーム，

- Y_0 が P の閉 κ 部分スキームで $\operatorname{Spec}\kappa$ 上 proper,
- X_0 が Y_0 の開 κ 部分スキーム

であり，P が X_0 の近傍で smooth なもののことである．

j を包含射 $X_0 \to Y_0$ とする．P に対応する rigid 解析空間を P^{rig} とし，それに付随する $\mathrm{sp} : P^{\mathrm{rig}} \to P$ を特殊化写像とする [Ber96, (0.2.2)].

定義 2.6. 部分集合 $Z \subset P$ に対して，$\mathrm{sp}^{-1}(Z)$ を $]Z[_P$ とかき，Z の P における **tube** という．P が明らかであるときは，$]Z[$ とかく．

定義 2.7. $Z_0 = Y_0 \setminus X_0$ とする．admissible 開集合 $U \subset]Y_0[_P$ が，$]X_0[_P$ の **strict neighborhood** であるとは，$\{U,]Z_0[_P\}$ が $]Y_0[_P$ の admissible cover になっていることをいう．

V を strict neighborhood とし，$\mathsf{Mod}(V)$ を V 上の $\mathcal{O}_V$ 加群の層の圏とする．Berthelot は，次のような関手 $j^\dagger$ を構成した [Ber96, (2.1.1)]：

$$\begin{aligned} j^\dagger : \mathsf{Mod}(V) &\to \mathsf{Mod}(V) \\ F &\mapsto \varinjlim_U j_{U*} j_U^* F. \end{aligned}$$

ただし，U は V に含まれる $]X_0[_P$ の strict neighborhood 全体にわたって動き，$j_U : U \to V$ は包含射である．$j^\dagger : \mathsf{Conn}(V) \to \mathsf{Conn}(V)$ も同様に定義される．

$]Y_0[$ 上の $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群に対して，その上の接続を，定義 2.1 と同様に，加法的な写像 $\nabla : E \to E \otimes_{j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[_P}} j^\dagger\Omega^1_{]Y_0[_P}$ であって Leibniz 則を満たすものとして定義する．このような (E, ∇) を $\boldsymbol{j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}}$**-接続** とよぶことにする．可積分などの用語も同様に定義する．可積分 $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$-接続全体のなす圏を $\mathsf{Conn}(j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})$ とかく．

以下の可換図式における p_i $(i = 1, 2)$ を第 i 成分への射影，s は $P \times_{\mathrm{Spf}\mathcal{V}} P$ の普遍性から誘導される射とする．

$$\begin{tikzcd} & & P \times_{\mathrm{Spf}\mathcal{V}} P =: P^2 \arrow[d, "p_i"] \\ X_0 \arrow[r] & Y_0 \arrow[ur, "s"] \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

同様に，以下の可換図式における p_{ij} $(1 \le i < j \le 3)$ を第 i, j 成分への射影とする．

$$\begin{tikzcd} & & P \times_{\mathrm{Spf}\mathcal{V}} P \times_{\mathrm{Spf}\mathcal{V}} P =: P^3 \arrow[d, "p_{ij}"] \\ X_0 \arrow[r] & Y_0 \arrow[ur] \arrow[r] & P \times_{\mathrm{Spf}\mathcal{V}} P =: P^2 \end{tikzcd}$$

これらの射を用いて，

$$]Y_0[_{P^2} \xrightarrow{p_i^{\mathrm{rig}}}]Y_0[_P, \quad]Y_0[_{P^3} \xrightarrow{p_{ij}^{\mathrm{rig}}}]Y_0[_{P^2}$$

が誘導される．ここから関手

$$p_i^{\mathrm{rig},*} : \mathsf{Mod}(j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[_P}) \to \mathsf{Mod}(j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[_{P^2}})$$

$$p_{ij}^{\mathrm{rig},*} : \mathsf{Mod}(j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[_{P^2}}) \to \mathsf{Mod}(j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[_{P^3}})$$

が自然に定義される．

定義 2.8. $]Y_0[$ 上の $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群 E とその上の可積分接続を rigid triple T 上の **isocrystal** という．さらに，T 上の isocrystal E と同型 $\varepsilon : p_1^{\mathrm{rig},*}E \xrightarrow{\sim} p_2^{\mathrm{rig},*}E$ であって，cocycle 条件 $p_{13}^{\mathrm{rig},*}(\varepsilon) = p_{12}^{\mathrm{rig},*}(\varepsilon) \circ p_{23}^{\mathrm{rig},*}(\varepsilon)$ を満たすようなものを，T 上の**過収束 isocrystal** という．

T 上の過収束 isocrystal の圏を $\mathsf{Isoc}^\dagger(T)$ とかく．過収束 isocrystal は，Y_0, P には依らないので，しばしば $\mathsf{Isoc}^\dagger(T)$ を $\mathsf{Isoc}^\dagger(X_0)$ とかく．isocrystal であって，自明な接続から拡大を繰り返して得られるものを，**unipotent** isocrystal という．unipotent isocrystal は過収束である．X_0 上の unipotent isocrystal のなす圏を，$\mathsf{Un}^\dagger(X_0)$ とかく．

命題 2.9 ([CLS99, Propostion 2.3.2])**.** unipotent isocrystal は，拡大，部分 isocrystal，商，テンソル積，internal hom, 双対, 逆像をとる操作で閉じている．

命題 2.10 ([LS07, Propsition 6.1.15])**.** $j^\dagger$ は圏同値

$$\varinjlim_V \mathsf{Conn}(V) \cong \mathsf{Conn}(j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})$$

を誘導する．但し，V は $]Y_0[$ に含まれる $]X_0[$ の strict neighborhood を動く．

系 2.11. (E, ∇) を $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$-接続 とする．このとき，$]X_0[$ の strict neighborhood V と，その上の接続 (E_0, ∇_0) が存在し，

$$(E, \nabla) = j^\dagger(E_0, \nabla_0)$$

となる．E が unipotent であるときは，E_0 として unipotent なものをとることができる．また，$j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$-接続の射 $f : E \to F$ に対し，ある $]X_0[$ の strict neighborhood V 上の接続の射 f_0 があり，$j^\dagger(f_0) = f$ となる．

証明. 命題 2.10 より従う． □

2.2 淡中圏

2.2.1 淡中圏の定義

C を圏とする．

$$\otimes : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}; \quad (X, Y) \mapsto X \otimes Y$$

を関手とする．$(\mathsf{C}, \otimes)$ の**結合子**とは，自然同型

$$\phi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

であって，任意の対象 $X, Y, Z, T \in \mathsf{C}$ に対して，以下の図式が可換になるものである．

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \phi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[d, "\phi"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "\phi"] \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[rr, "\phi \otimes \mathrm{id}"] & & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T
\end{tikzcd}$$

$(\mathsf{C}, \otimes)$ の**交換子**とは，自然同型

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

であって，任意の対象 $X, Y \in \mathsf{C}$ に対して $\psi_{Y,X} \circ \psi_{X,Y} = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$ となるものである．結合子 ϕ，交換子 ψ が **compatible** であるとは，任意の対象 $X, Y, Z \in \mathsf{C}$ に対して以下の図式が可換になることをいう．

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \psi"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[dr, "\psi"] & \\
X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[dr, "\phi"'] & & & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "\phi"] \\
 & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[r, "\psi \otimes \mathrm{id}"] & (Z \otimes X) \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

対象 $\mathbb{1} \in \mathsf{C}$ と同型 $u : \mathbb{1} \to \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ の組 $(\mathbb{1}, u)$ について，関手

$$\mathsf{C} \to \mathsf{C}; \quad X \mapsto \mathbb{1} \otimes X$$

が圏同値となるとき，$(\mathbb{1}, u)$ を $(\mathsf{C}, \otimes)$ の**単位子**という．

定義 2.12. $(\mathsf{C}, \otimes)$ が，compatible な結合子 ϕ と交換子 ψ，単位子 $(\mathbb{1}, u)$ をもつとき，C を**テンソル圏**という．

以下，任意の $X, Y \in \mathsf{C}$ に対して関手

$$\mathsf{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}; \quad T \mapsto \mathrm{Hom}(T \otimes X, Y) \tag{2.5}$$

が表現可能であると仮定する．すなわち，任意の $X, Y \in \mathsf{C}$ に対して，ある $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) \in \mathsf{C}$ が存在して，関手としての同型

$$\mathrm{Hom}(\bullet \otimes X, Y) \cong \mathrm{Hom}(\bullet, \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y))$$

があるとする．この同型によって $\mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)}$ に対応する元を $\mathrm{ev}_{X,Y} : \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes X \to Y$ とする．

$$(\underline{\mathrm{Hom}}(X_1,Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2,Y_2)) \otimes (X_1 \otimes X_2) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathrm{Hom}}(X_1,Y_1) \otimes X_1) \otimes (\underline{\mathrm{Hom}}(X_2,Y_2) \otimes X_2)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{ev}_{X_1,Y_1} \otimes \mathrm{ev}_{X_2,Y_2}} Y_1 \otimes Y_2$$

から射

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X_1,Y_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X_2,Y_2) \to \underline{\mathrm{Hom}}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2) \tag{2.6}$$

が誘導される．

$X^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{1})$ とする．自然な同型

$$\mathrm{Hom}(X \otimes X^\vee, \mathbb{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, X^{\vee\vee})$$

によって，$\mathrm{ev}_{X^\vee,X} \circ \psi : X \otimes X^\vee \to \mathbb{1}$ に対応する写像を $i_X : X \to X^{\vee\vee}$ とする．

定義 2.13. テンソル圏 $(\mathsf{C}, \otimes)$ が,

- 任意の $X, Y \in \mathsf{C}$ に対して，関手 (2.5) が表現可能で，$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ が存在する．
- 任意の $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathsf{C}$ に対して，(2.6) が同型である．
- 任意の $X \in \mathsf{C}$ に対して，i_X が同型である．

を満たすとき，$(\mathsf{C}, \otimes)$ は **rigid** であるという．

定義 2.14. K を体とする．圏 C が ***K* 線形**であるとは, 任意の $X, Y \in \mathsf{C}$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$ は K 線形空間の構造が入っていて，$X, Y, Z \in \mathsf{C}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Z)$$

が K 双線形であることをいう．

定義 2.15. $(\mathsf{C}, \otimes), (\mathsf{C}', \otimes)$ をテンソル圏とする．(F, c) が**テンソル関手**であるとは，関手 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ と自然同型 $c_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$ の組であり，以下の条件を満たすもののことである：

- 任意の $X, Y, Z \in \mathsf{C}$ に対して，以下の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
FX \otimes (FY \otimes FZ) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes c"] \arrow[d, "\phi"'] & FX \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[r, "c"] & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "F(\phi)"] \\
(FX \otimes FY) \otimes FZ \arrow[r, "c \otimes \mathrm{id}"] & F(X \otimes Y) \otimes FZ \arrow[r, "c"] & F((X \otimes Y) \otimes Z)
\end{tikzcd}$$

- 任意の $X, Y \in \mathsf{C}$ に対して，以下の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
FX \otimes FY \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\psi"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "F(\psi)"] \\
FY \otimes FX \arrow[r, "c"] & F(Y \otimes X)
\end{tikzcd}$$

- $(\mathbb{1}, u)$ が C の単位子ならば，$(F(\mathbb{1}), F(u))$ は C' の単位子である．

定義 2.16. テンソル関手の射 $\lambda : (F, c) \to (G, d)$ とは，自然変換 $\lambda : F \to G$ であって，任意の対象 $X, Y \in \mathsf{C}$ に対して，以下の図式が可換になることをいう：

$$\begin{tikzcd} FX \otimes FY \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\lambda_X \otimes \lambda_Y"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\lambda_{X \otimes Y}"] \\ GX \otimes GY \arrow[r, "d"] & G(X \otimes Y) \end{tikzcd}$$

テンソル関手の射 $\lambda : (F, c) \to (G, d)$ 全体を $\mathrm{Hom}^{\otimes}(F, G)$ とかく．$\mathrm{Hom}^{\otimes}(F, G)$ の要素で可逆なもの全体を $\mathrm{Isom}^{\otimes}(F, G)$，さらに $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F) := \mathrm{Isom}^{\otimes}(F, F)$ とかく．

定義 2.17. K を体とし，$\mathsf{Vec}(K)$ を K 上有限次元ベクトル空間のなす圏とする．rigid アーベル K 線形テンソル圏 C であって，$\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(\mathbb{1}) = K$ であり，忠実完全な K 線形テンソル関手 $\omega : \mathsf{C} \to \mathsf{Vec}(K)$ をもつものを，**neutral 淡中圏**という．ω のことを C の**ファイバー関手**という．

体 K と K 代数 R に対して，テンソル関手 ϕ_R を

$$\phi_R : \mathsf{Vec}(K) \to \mathsf{Mod}(R); \quad V \mapsto V \otimes_K R$$

とする．2 つのテンソル関手 $(F, c), (G, d) : \mathsf{C} \to \mathsf{Vec}(K)$ に対し，関手

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(F, G) &: \mathsf{Alg}(K) \to \mathsf{Set}; \quad R \mapsto \mathrm{Hom}^{\otimes}(\phi_R \circ F, \phi_R \circ G) \\ \underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(F, G) &: \mathsf{Alg}(K) \to \mathsf{Set}; \quad R \mapsto \mathrm{Isom}^{\otimes}(\phi_R \circ F, \phi_R \circ G) \\ \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(F) &:= \underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(F, F) \end{aligned}$$

を定義する．

定理 2.18 ([DM18, THEOREM 2.11.])**.** $(C, \otimes)$ を neutral 淡中圏とし，$\omega : \mathsf{C} \to \mathsf{Vec}(K)$ をファイバー関手とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega) : \mathsf{Alg}(K) \to \mathsf{Grp}$ は，affine 群スキーム G で表現される．
(2) $\mathsf{Rep}_K(G)$ を，G の K 上有限次元表現のなす圏とする．ω は関手 $\mathsf{C} \to \mathsf{Rep}_K(G)$ を誘導し，これは圏同値を与える．

2.2.2 torsor

以下，2 つのファイバー関手 $\omega_1, \omega_2 : \mathsf{C} \to \mathsf{Vec}(K)$ に対して，$\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ を $\pi_1(\mathsf{C}, \omega_1, \omega_2)$ とかくこととし，$\pi_1(\mathsf{C}, \omega_1) := \pi_1(\mathsf{C}, \omega_1, \omega_1)$ とする．さらに，結合射

$$\circ : \pi_1(\mathsf{C}, \omega_2, \omega_3) \times \pi_1(\mathsf{C}, \omega_1, \omega_2) \to \pi_1(\mathsf{C}, \omega_1, \omega_3) \tag{2.7}$$

があり，特に $\pi_1(\mathsf{C}, \omega_1, \omega_2)$ は $\pi_1(\mathsf{C}, \omega_1)$ の作用，$\pi_1(\mathsf{C}, \omega_2)$ の作用によって torsor (principal homogeneous space) となる．

テンソル関手 $F: \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ は,

$$F^*: \pi_1(\mathsf{C}', \omega_1, \omega_2) \to \pi_1(\mathsf{C}, \omega_1 \circ F, \omega_2 \circ F) \tag{2.8}$$

を，K 代数 S に対して $(F^*\gamma)_S = \gamma_{F(S)}$ と与えることで誘導する．これは結合射 (2.7) と compatible である．

3 Coleman 積分論

3.1 Coleman による定式化

$|\ |_p$ を $\mathbb{C}_p$ の絶対値で，$|p|_p = p^{-1}$ なるものとする．$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p \leq 1\}$ とし，$\mathfrak{m} = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < 1\}$ をその唯一の極大イデアルとする．以下，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ の各点を $\mathbb{C}_p$ の元または ∞ として表す．

定義 3.1. **還元写像** $\mathrm{red}: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \to \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$ を，$[x, y]$（但し $x, y \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ で一方は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ の元）を $[x \pmod{\mathfrak{m}} : y \pmod{\mathfrak{m}}]$ に送るものとして定義することができる．red による $\overline{a} \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$ の逆像を $]\overline{a}[$ とかく．

$S = \{s_0, ..., s_d\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ を有限集合，$\overline{S} = \{\overline{s_0}, ..., \overline{s_d}\} \subset \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$ をその reduction とする．但し，$s_0, ..., s_d$ は，$i \neq j$ なら $\overline{s_i} \neq \overline{s_j}$ であるようにとる．$Y = \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}, X = \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \setminus \{s_0, ..., s_d\}$ とし，$Y_0 = \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}, X_0 = X \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ をその special fiber とする．

$|z|_p < 1$ なる $z \in \mathbb{C}_p$ に対して，

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k!}$$

は well-defined である．これによって $\log:]\overline{1}[\to \mathbb{C}_p$ を定める．さらに，$\log^{\varpi} p = \varpi \in \mathbb{C}_p$ と定めることで，$\log^{\varpi}: \mathbb{C}_p^\times \to \mathbb{C}_p$ を，局所解析的な群準同型として log を拡張したものとして定義することができる．以下 ϖ を固定する．

z_x を $]x[$ の局所座標 $z_x:]x[\xrightarrow{\sim}]0[$ とし，$\lambda < 1$ に対して

$$U_\lambda = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \bigcup_{i=0}^{d} z_{\overline{s_i}}^{-1}(\{\alpha \in \mathbb{C}_p \mid |\alpha|_p \leq \lambda\})$$

とすると，$U := \varprojlim_{\lambda \to 1^-} U_\lambda$ は局所座標の取り方に依らない．また，

$$A^\dagger(U) := \Gamma(]Y_0[, j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}) = \varinjlim_{\lambda \to 1^-} A(U_\lambda), \ \ \Omega^\dagger(U) := \Gamma(]Y_0[, j^\dagger \Omega^1_{]Y_0[}) = \varinjlim_{\lambda \to 1^-} \Omega^1(U_\lambda)$$

とおく．さらに，

$$A^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U) := \prod_{x \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)} A^{\varpi}_{\log}(]x[), \ \ \Omega^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U) := \prod_{x \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)} \Omega^{\varpi}_{\log}(]x[)$$

とおく．ここで，

$$
\begin{aligned}
A^{\varpi}_{\log}(U_x) &:= \begin{cases} A(\,]x[\,) & (x \notin S) \\ \left(\varinjlim_{\lambda \to 1^-} A(\,]x[\cap U_\lambda) \right) [\log^{\varpi}(z_x)] & (x = \overline{s_i}\ (i = 0, ..., d)) \end{cases} \\
\Omega^{\varpi}_{\log}(U_x) &:= A^{\varpi}_{\log}(U_x) dz_x
\end{aligned}
$$

である．特に $A^{\dagger}(U) \subset A^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U), \Omega^{\dagger}(U) \subset \Omega^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U)$ であることに注意する．

各成分ごとに微分を考えることで，$\mathbb{C}_p$ 線形写像 $d : A^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U) \to \Omega^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U)$ がある．

定義 3.2. 何らかの $\mathbb{F}_{p^s}$-scheme X' を用いて $X_{\overline{\mathbb{F}}_p} \cong X' \otimes_{\mathbb{F}_{p^s}} \overline{\mathbb{F}}_p$ と表されているとし，Fr を X' 上の絶対 Frobenius とする．このとき，$\mathrm{Fr}^s \otimes_{\mathbb{F}_{p^s}} \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ の形で与えられる $X' \otimes_{\mathbb{F}_{p^s}} \overline{\mathbb{F}}_p \cong X_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 上の $\overline{\mathbb{F}}_p$-endomorphism を，X 上の **Frobenius endomorphism** という．

定理 3.3 ([Bes00, Theorem 2.2.])**.** $X_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 上の任意の Frobenius endomorphism φ に対して，十分 1 に近い r, s と rigid 解析空間の射 $\phi : U_r \to U_s$ が存在し，ϕ の reduction は φ となる．このような ϕ を U 上の **Frobenius endomorphism** という．

$\Omega^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U) := A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U) \otimes_{A^{\dagger}(U)} \Omega^{\dagger}(U)$ とする．Coleman[Col82] の結果によれば，次が成立する．

定理 3.4 ([Col82],[Bes00, section 2.])**.** $A^{\dagger}(U)$ を含む $A^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U)$ の部分 $\mathbb{C}_p$ 代数 $A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U)$ と，$\mathbb{C}_p$ 線形写像

$$
\int_{(\varpi)} : \Omega^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U) \to A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U)/\mathbb{C}_p
$$

の組であって，次を満たすものがただ 1 つ存在する：

- 任意の $\omega \in \Omega^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U)$ に対して，$d\left(\int_{(\varpi)} \omega\right) = \omega$.
- 任意の $\omega \in \Omega^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U)$ および Frobenius endomorphism ϕ に対して，$\int_{(\varpi)} (\phi^* \omega) = \phi^* \left(\int_{(\varpi)} \omega\right)$.
- $g \in A^{\dagger}(U)$ に対して，$\int_{(\varpi)} dg \equiv g \ (\mathrm{mod}\, \mathbb{C}_p)$

このように Coleman 積分は分枝 ϖ の取り方に依存するものである．そこで，別の $\varpi_1 \in \mathbb{C}_p$ をとる．$A^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U)$ の元の $\log^{\varpi}(z_x)$ を $\log^{\varpi_1}(z_x)$ に置き換える操作は，環同型 $A^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U) \cong A^{\varpi_1}_{\mathrm{loc}}(U)$ を誘導する．加群同型 $\Omega^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U) \cong \Omega^{\varpi_1}_{\mathrm{loc}}(U)$ も同様である．さらに，$\tau_{\varpi,\varpi_1} : A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U) \cong A^{\varpi_1}_{\mathrm{Col}}(U)$，$\tau_{\varpi,\varpi_1} : \Omega^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U) \cong \Omega^{\varpi_1}_{\mathrm{Col}}(U)$ も引き起こす．

命題 3.5 ([Fur04, Propositon 2.3])**.** 以下の図式が可換になる：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U) & \xrightarrow{\int_{(\varpi)}} & A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U)/\mathbb{C}_p \\ {\scriptstyle \tau_{\varpi,\varpi_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{\varpi,\varpi_1}} \\ \Omega^{\varpi_1}_{\mathrm{Col}}(U) & \xrightarrow[\int_{(\varpi_1)}]{} & A^{\varpi_1}_{\mathrm{Col}}(U)/\mathbb{C}_p \end{array}$$

3.2 Besser による淡中圏解釈

3.2.1 準備

ここでは，K を標数 0 の完備非アルキメデス的体，$\mathcal{V}$ をその整数環，κ を剰余体とする．V を smooth な K 上 rigid 解析空間とする．

補題 3.6. (E,∇) を torsion free な接続とし，B を torsion free な $\mathcal{O}_V$ 加群とする．$f : E \to B$ を $\mathcal{O}_V$ 加群の射とする．$A = \mathrm{Ker}\, f \subset E$ とする．$A_n \subset E$ を以下のように帰納的に定める：

$$\begin{aligned} A_0 &= A \\ A_{n+1} &= \mathrm{Ker}\left[A_n \xrightarrow{\nabla} E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V \xrightarrow{q_n} (E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V)/(A_n \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V)\right]. \end{aligned}$$

$A_\infty = \cap_{n=0}^{\infty} A_n$ とする．このとき，次が成り立つ：

(1) $\nabla^{-\infty} A := (A_\infty, \nabla)$ は接続となる．

(2) $(E', \nabla_{E'}) \xrightarrow{\varphi} (E,\nabla)$ を接続の射で，像が A に含まれるとする．このとき，この射は $\nabla^{-\infty} A$ を経由する．

証明.

(1) まず，A_∞ が連接であることを示す．$q_n \circ \nabla : A_n \to (E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V)/(A_n \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V)$ は $\mathcal{O}_V$ 加群の射である．なぜならば，$b \in \mathcal{O}_V$,$a \in A_n$ に対して，

$$q_n \circ \nabla(ba) = q_n(a \otimes db + b\nabla(a)) = \overline{b\nabla(a)} = b \cdot q_n(\nabla(a))$$

であるからである．従って，帰納的にその核である A_n が連接であることがわかる．よって，帰納的にこれを繰り返して，A_∞ は連接である．

$B_n = E/A_n$ とする．B_n は torsion free であることを示す．$n = 0$ のときは，$B_0 = E/A_0 \subset B$ で B が torsion free であることから従う．B_n が torsion free であると仮定する．V は smooth ゆえ，Ω^1_V は局所自由で特に平坦である．完全列

$$0 \to A_n \to E \to B_n \to 0$$

に $\otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V$ することで，

$$(E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V)/(A_n \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V) \cong B_n \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega^1_V$$

を得る．$q_n \circ \nabla$ によって，$A_n/A_{n+1} \to (E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega_V^1)/(A_n \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega_V^1)$ は単射で，$B_n \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega_V^1$ は torsion free であるから，A_n/A_{n+1} は torsion free である．従って，完全列

$$0 \to A_n/A_{n+1} \to B_{n+1} \to B_n \to 0$$

で $A_n/A_{n+1}, B_n$ が torsion free であるから，B_{n+1} は torsion free である．
さて，$U \subset V$ を affinoid とする．n が十分大きければ，$A_n|_U$ は一定であることを示す．$A_n, A_n/A_{n+1}$ が連接であることより，

$$A_n|_U = \widetilde{A_n(U)}, \quad A_n/A_{n+1} = \widetilde{A_n(U)/A_{n+1}}(U)$$

である．Noether の正規化定理より，ある Tate 代数 T_l が存在して，$T_l \to \mathcal{O}_V(U)$ は有限射となる．$L := \mathcal{O}_V(U) \otimes_{T_l} \mathrm{Frac}(T_l)$ は，$\mathrm{Frac}(T_l)$ 上有限次元のベクトル空間で，n が十分大きければ，

$$A_n(U)/A_{n+1}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} L = 0$$

である．なぜならば，局所化 $T_l \to \mathrm{Frac}(T_l)$ は平坦射であるから，左辺は $(A_n(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} L)/(A_{n+1}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} L)$ と同型であり，$A_n(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} L$ などが L 上の有限次元ベクトル空間であるからである．最後に，$A_n(U)/A_{n+1}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} L$ は，torsion free な $A_n(U)/A_{n+1}(U)$ の局所化ゆえ，$A_n(U)/A_{n+1}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} L = 0$ であるならば，$A_n(U)/A_{n+1}(U) = 0$ である．以上から，n が十分大きければ，$A_n|_U$ は一定であることが示された．
$A_\infty|_U = A_n|_U = A_{n+1}|_U$ となる n をとると，

$$\nabla(A_\infty|_U) = \nabla(A_{n+1}|_U) \subset A_n|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega_U^1 = A_\infty|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega_U^1$$

であるから，(A_∞, ∇) は well-defined な接続となる．

(2) $\nabla(\varphi(a)) = (\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla(a) \in A \otimes \Omega_V^1$ より，$\varphi(a) \in A_1$ である．これを繰り返すと，$\varphi(a) \in A_\infty$ が示される．

□

補題 3.7. 補題 3.6 の状況で，$U \subset V$ を開部分空間とする．$y \in A(U)$ で $\nabla(y) = 0$ であるならば，$y \in \nabla^{-\infty} A(U)$ である．

証明. A_∞ の定義から明らか． □

$f \in \mathcal{O}_V, e \in E$ に対して，

$$\nabla^2(fe) = \nabla(e \otimes df + f \cdot \nabla(e)) = \nabla(e) \wedge df + df \wedge \nabla(e) + f \cdot \nabla^2(e) = f\nabla^2(e)$$

であるから，V 上の接続 E に対して，$\nabla^2 : E \to E \otimes_{\mathcal{O}_V} \Omega_V^2$ は，$\mathcal{O}_V$ 加群の準同型である．補題 3.6 によって，以下のような接続を考えることができる．

定義 3.8. E の可積分化 E^{int} を $E^{\mathrm{int}} = \nabla^{-\infty} \operatorname{Ker} \nabla^2$ で定める．

系 3.9. E を V 上の接続とする．

(1) $\varphi : (E', \nabla_{E'}) \to (E, \nabla_E)$ を接続の射で，E' は可積分であるとする．このとき，φ は E^{int} を経由する．

(2) $y \in E(U)$ で $\nabla(y) = 0$ であるならば，$y \in E^{\mathrm{int}}(U)$ である．

証明.

(1) $\nabla_{E'}$ が可積分であることから，$e \in E$ に対して，

$$\nabla_E^2(\varphi(e)) = (\varphi \otimes \mathrm{id})(\nabla_{E'}^2(e)) = (\varphi \otimes \mathrm{id})(0) = 0$$

よって，φ の像は $\mathrm{Ker}\,\nabla^2$ に含まれるので，補題 3.6(2) より，主張が従う．

(2) 補題 3.7 より明らか．

□

3.2.2 good reduction の場合の ファイバー関手の構成

以下，rigid triple $T = (X_0, Y_0, P)$ を考える．

補題 3.10. E を rank n の $]X_0[$ 上の unipotent 接続とする．$x \in X_0(\kappa)$ に対し，

$$E(\,]x[\,)^{\nabla} := \{v \in E(\,]x[\,) \mid \nabla(v) = 0\}$$

は K 上 n 次元のベクトル空間である．

証明. 1 次元の場合で示す（2 次元以上も同様である）．$]x[\cong \varinjlim_{r \to 1^-} \mathrm{Sp}\, K\langle\langle \frac{z}{r} \rangle\rangle$ とみなすと，命題 2.4 より，E の適当な基底 $e_1, ..., e_n$ をとると，冪零上三角行列 $B \in M_n(\Omega^1_{]x[})$ を用いて

$$\nabla_E \mathbf{x} = d\mathbf{x} + B\mathbf{x}$$

とかける．

$$\mathcal{O}_{]x[}(\,]x[\,) = \varprojlim_{r \to 1^-} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \,\middle|\, a_n \in K, |a_n|_p r^n \to 0 \ (n \to \infty) \right\}$$

であることに注意して，微分方程式 $\nabla \mathbf{x} = 0$ を下から解くことを考える．即ち，連立微分方程式

$$\begin{cases} dx_n = 0 \\ dx_{n-1} + b_{n-1,n} x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ dx_1 + \cdots + b_{1n} x_n = 0 \end{cases} \qquad (b_{ij} \in \Omega^1_{]x[})$$

を上から解く．

まず，$x_n \in K$ である．次に，$-b_{n-1,n} x_n \in \Omega^1_{]x[}$ を積分して，冪級数の簡単な計算から，$x_{n-1} \in \mathcal{O}_{]x[}(\,]x[\,)$ として定まる．これを繰り返すと，初期値の自由度が n であり，解空間は K 上ベクトル空間として n 次元である． □

過収束 isocrystal の一般論によって，次の定理が成り立つ：

命題 3.11. $x \in X_0(\kappa)$ に対して，$\mathsf{Un}^\dagger(X_0)$ 上の関手 ω_x を，x^* として定義する．すると，

$$\omega_x(E, \nabla) = E(\,]x[\,)^{\nabla}$$

と同一視される．

補題 3.10 と 命題 3.11 によって次を得る：

定理 3.12 ([Cre92, 1.8. Lemma.])**.** 圏 $\mathsf{Un}^\dagger(X_0)$ は，ω_x をファイバー関手として neutral 淡中圏となる．

命題 3.13. $f : X_0' \to X_0$ を κ−mophism とし，$x' \in X_0'(\kappa), x \in X_0(\kappa), f(x') = x$ とする．このとき，自然な同型

$$\omega_x \cong \omega_{x'} \circ f^*$$

がある．

証明.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\,\kappa \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "x'^*"'] & \mathrm{Spec}\,\kappa \arrow[d, "x^*"] \\
X_0' \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & X_0 \arrow[d] \\
& \mathrm{Spec}\,\kappa
\end{tikzcd}$$

上の図式を考えると，

$$\omega_{x'} \circ f^* = x'^* \circ f^* = (f \circ x')^* \cong x^* = \omega_x$$

が誘導される． □

3.2.3 bad reduction の場合のファイバー関手の構成

点 $x \in (Y_0 \setminus X_0)(\kappa)$ に付随する $\mathsf{Un}^\dagger(X_0)$ 上のファイバー関手を構成する．簡単のため，Y_0 が 1 次元の場合を考えよう．

$E \in \mathsf{Un}^\dagger(X_0)$ の rank が n であるとする．定理 2.11 より，$]Y_0[$ に含まれるある $]X_0[$ の strict neighborhood V 上で定義された unipotent 接続 $(\widetilde{E}, \widetilde{\nabla})$ を用いて $(E, \nabla) = j^\dagger(\widetilde{E}, \widetilde{\nabla})$ と表せる．局所的に x がパラメータ t を用いて $x = V(\bar{t})$ と定義されているとする．ω_x を考える上で，$\widetilde{E}$ は $]x[\cap V$ に含まれるある円環 $A_r = \{r < |t| < 1\}$ 上で定義されているとしてよい．そこでは命題 2.4 より，加群として $\widetilde{E} = \mathcal{O}_{A_r}^n$ であるとしてよく，上三角行列 $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\Omega^1_{A_r})$ を用いて，接続を

$$\nabla \mathbf{x} = d\mathbf{x} + B\mathbf{x}$$

と表すことができる．微分方程式 $\nabla\mathbf{x}=0$ を下から解くことを考える．即ち，連立微分方程式

$$\begin{cases} dx_n = 0 \\ dx_{n-1} + b_{n-1,n}x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ dx_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

を上から解く．

$$\mathcal{O}_{A_r}(A_r) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \;\middle|\; |a_n|_p \lambda^n \xrightarrow{n\to\infty} 0, |a_n|_p r'^n \xrightarrow{n\to -\infty} 0 \ (\forall \lambda \to 1^-, r' \to r^+) \right\}$$
$$\Omega^1_{A^r}(A_r) = \mathcal{O}_{A_r}(A_r)dt$$

であることに注意すると（特に $\dfrac{1}{t}$ は A_r 上で原始関数 $\log^{\varpi} t$ をもつことに注意すると），$\mathcal{O}_{A^r}(A^r)[\log^{\varpi} t]^{\oplus n}$ の中にある (3.1) の解全体の集合は，K ベクトル空間として n 次元であることがわかる．この解を割り当てることによって関手 $\mathsf{Un}(V) \to \mathsf{Vec}(K)$ が定義された．これによって命題 2.10 より，$\mathsf{Un}^{\dagger}(X_0) \to \mathsf{Vec}(K)$ が定義される．good reduction の場合と同様に，これが $\omega_x = x^*$ と同一視される．

定理 3.14. ω_x は $\mathsf{Un}^{\dagger}(X_0)$ 上のファイバー関手となる．

定義 3.15. $E(]x[)[\log^{\varpi} t]$ の元 f に対して，$f=\sum_{i=0}^{N} f_i(\log^{\varpi} t)^i$ $(f_i \in E(]x[))$，$f_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ と表したときに，a_0 を f の（パラメータ t による）**定数項**という．これを $\mathrm{const}(f;t)$ と表す．

後に用いるので，Y_0 が 2 次元の場合も考えよう．$D := Y_0 \setminus X_0$ が $x \in D$ の近傍で，Y_0 の中で $D = V(\overline{t_1 t_2}), x = V(\overline{t_1}, \overline{t_2})$ と定義されているとする．

定義 3.16. $E(]x[)[\log t_1, \log t_2]$ の元 f に対して，$f = \sum_{0\le i,j\le N} f_{ij}(\log t_1)^i(\log t_2)^j$ $(f_{ij} \in E(]x[))$，$f_{00} = \sum_{0\le i,j} a_{ij} t_1^i t_2^j$ と表したときに，a_{00} を f の（パラメータ t_1, t_2 による）**定数項**という．これを $\mathrm{const}(f; t_1, t_2)$ と表す．

定数項の概念はパラメータに依存することに注意する．

3.2.4 Frobenius invariant path の構成

定義 3.17. $G : \mathsf{Un}^{\dagger}(X_0) \to \mathsf{Un}^{\dagger}(X_0)$ を関手とする．$\mathsf{Un}^{\dagger}(X_0)$ 上の ***G*-ファイバー関手**とは，$\mathsf{Un}^{\dagger}(X_0)$ 上のファイバー関手 ω と同型 $\omega \cong \omega \circ G$ の組のことである．

$q = p^r$ とし，X_0' は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義されているスキームであるとする．ここでは，$X_0 = X_0' \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa$ と表されると仮定する．このとき，X_0' の絶対 Frobenius を Fr とし，$\mathrm{Fr}^r \otimes \mathrm{id}$ で与えられる $X_0 = X_0' \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa$ の endomorphism を X_0 の **Frobenius endomorphism** といい，F で表す（定義 3.2）．

F は，pull-back によって

$$F^* : \mathsf{Un}^\dagger(X_0) \to \mathsf{Un}^\dagger(X_0)$$

を誘導する（命題 2.9）.

定義 3.18. $\mathsf{Un}^\dagger(X_0)$ 上の **Frobenius ファイバー関手**とは，ある Frobenius endomorphism F に対して，ω が F^*-ファイバー関手 となるもののことである．

F を Frobenius endomorphism とすると，(2.8) によって，

$$F^* : \pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2) \to \pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)$$

が誘導される ($\pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2) := \pi_1(\mathsf{Un}^\dagger(X_0), \omega_1, \omega_2)$ とした, 以後同様の記号を用いる)．同様に，$F^* : \pi_1(X_0, \omega_1) \to \pi_1(X_0, \omega_1)$ が誘導されるが，この F^* は，$\pi_1(X_0, \omega_1)$ の $\pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)$ への作用と compatible である．すなわち，$g \in \pi_1(X_0, \omega_1)$，$a \in \pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)$ に対して，

$$F^*(ga) = F^*(g)F^*(a)$$

が成り立つ．

定理 3.19. (1) ω_1, ω_2 を $\mathsf{Un}^\dagger(X_0)$ の F^*-ファイバー関手とする．このとき，ただ 1 つの $\gamma_{\omega_1,\omega_2} \in \pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)$ が存在し，$F^*\gamma_{\omega_1,\omega_2} = \gamma_{\omega_1,\omega_2}$ である．さらに ω_3 を別の F^*-ファイバー関手とすると，結合則 $\gamma_{\omega_2,\omega_3} \circ \gamma_{\omega_1,\omega_2} = \gamma_{\omega_1,\omega_3}$ が成り立つ．

(2) $\gamma_{\omega_1,\omega_2}$ は F のとり方に依らない．すなわち，ω_1, ω_2 が共に F_1^*-ファイバー関手 であるような別の F_1 をとっても，$F^*\gamma_{\omega_1,\omega_2} = \gamma_{\omega_1,\omega_2}$ で定まる $\gamma_{\omega_1,\omega_2}$ は $F_1^*\gamma_{\omega_1,\omega_2} = \gamma_{\omega_1,\omega_2}$ を満たす．

この定理 3.19 は，次の命題を証明することで得られる：

命題 3.20 ([Bes02, Theorem 3.1.])**.** 定理 3.19 の設定で，

$$\pi_1(X_0, \omega_1) \to \pi_1(X_0, \omega_1); \quad g \mapsto g^{-1}F^*(g)$$

は同型である．

このあと，命題 3.20 から定理 3.19 が得られることのみ確認するが，その前に命題 3.20 の証明のアイデアのみ述べておく．

$\mathrm{Lie}(\pi_1(X_0, \omega))$ の完備普遍包絡環 $\widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{Lie}(\pi_1(X_0, \omega))$ について，その augmentation ideal を $\mathfrak{a}$ とおく．Frobenius と compatible である全射

$$H^1_{\mathrm{rig}}(X_0/K)^{\otimes(-n)} \to \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$$

があり（[Chi98, II.2.3., proof of Lemma II.2.4.]），Frobenius の作用について $H^1_{\mathrm{rig}}(X_0/K)$ が mixed with positive weights をもつ（[Chi98, Theorem I.2.2.]）．このことが命題 3.20 の証明において重要である．

証明.（命題 3.20 $\Longrightarrow$ 定理 3.19）

まず，$F^*a = a$ を満たす $a \in \pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)$ がただ 1 つであることを示す．もし，$a, ga \in \pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)$（$g \in \pi_1(X, \omega_1)$）が F^* で固定されるならば，

$$ga = F^*(ga) = F^*(g)F^*(a) = F^*(g)a$$

が成り立つ．よって，$g = F^*(g)$ であるから，$g^{-1}F^*(g) = 1 = 1^{-1}F^*(1)$ であるので，命題 3.20 によって $g = 1$ である．即ち，$a = ga$ であり，F^* で固定される元はたかだか 1 つである．

$\pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)(L)$ が空でないような十分大きい有限次元 Galois 拡大体 L/K をとり，1 つの元を a_0 とする．$a = ga_0$ ($g \in \pi_1(X_0, \omega_1)(L)$) について，

$$\begin{aligned} a = F^*(a) &\Longleftrightarrow ga_0 = F^*(ga_0) \\ &\Longleftrightarrow ga_0 = F^*(g)F^*(a_0) \\ &\Longleftrightarrow a_0 = g^{-1}F^*(g)F^*(a_0) \end{aligned} \tag{3.2}$$

であることに注意する．そこでまず，$hF^*(a_0) = a_0$ を満たすただ 1 つの $h \in \pi_1(X_0, \omega_1)$ をとり，命題 3.20 によって $g^{-1}F^*(g) = h$ を満たす $g \in \pi_1(X_0, \omega_1)$ をとる．この g に対して，(3.2) が成り立つので，$a = F^*(a)$ を満たす $a \in \pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)(L)$ がとれたことになる．

$a \in \pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)(L)$ は，各 M に対して，ベクトル空間としての射 $a_M : \omega_1(M) \otimes L \to \omega_2(M) \otimes L$ を与えるものである．$a = F^*(a)$ とは，可換図式

$$\begin{array}{ccc} \omega_x(M) \otimes L & \xrightarrow{a_M} & \omega_x(M) \otimes L \\ {\scriptstyle \varphi_M \otimes \mathrm{id}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi_M \otimes \mathrm{id}} \\ \omega_x(F^*M) \otimes L & \xrightarrow{a_{F^*M}} & \omega_x(F^*M) \otimes L \end{array}$$

が存在することである（φ を命題 3.13 で与えられる同型 $\omega_x \cong \omega_x \circ F^*$ としている）．すなわち，

$$(\varphi_M \otimes \mathrm{id}) \circ a_M \circ (\varphi_M^{-1} \otimes \mathrm{id}) = a_{F^*M}$$

であるが，ここに $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ の元を作用させて，φ が K 上定義されていることから

$$(\varphi_M \otimes \mathrm{id}) \circ a_M^\sigma \circ (\varphi_M^{-1} \otimes \mathrm{id}) = a_{F^*M}^\sigma$$

である．これは，$a^\sigma = F^*(a^\sigma)$ であることを意味する．唯一性から，$a^\sigma = a$ である．よって，a は σ 不変で，$a \in \pi_1(X_0, \omega_1, \omega_2)(K)$ である．

結合則についても唯一性から明らか．これで (1) は示された．

(2) を示す．Frobenius endomorphism の性質から，$F^s = F_1^t (=: F_2)$ となる自然数 s, t がとれる．F, F_1, F_2 に対するものを $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ とする．$\gamma = (F^*)^s \gamma = F_2^* \gamma$ であるから，一意性より $\gamma = \gamma_2$ である．同様に，$\gamma_1 = \gamma_2$ も得るので $\gamma = \gamma_1$ である． □

補題 3.21. X_0 の任意の 2 点 x, y に対して，その 2 点を固定する Frobenius endomorphism が存在する．

証明. x, y が共に $\mathbb{F}_p^s$ 上定義されているとする．$\mathrm{Fr}^s \otimes \mathrm{id}$ から誘導される Frobenius endomorphism が 2 点 x, y を固定する． □

補題 3.22. $x \in X_0(\kappa)$ とする．x を固定する Frobenius endomorphism F に対して，ω_x は F^*-ファイバー関手となる．

証明. 命題 3.13 より明らか． □

系 3.23. E を rigid triple (X_0, Y_0, P) 上の unipotent isocrystal とする．$x \in X_0(\kappa)$ を任意の点とする．任意の horizontal な $v_x \in E(\,]x[\,)$ に対して，各点 $y \in X_0(\kappa)$ について（$\gamma_{\omega_x,\omega_y}$ によって）ただ 1 つの horizontal な $v_y \in E(\,]y[\,)$ が対応し，次を満たす：

(1) 対応 $\gamma_{\omega_x,\omega_y} : E(\,]x[\,) \to E(\,]y[\,)$; $v_x \mapsto v_y$ は K 線形で，可逆である．
(2) $E = \mathbb{1}$ とすると，1 は 1 に対応する．
(3) $f : E \to E'$ が unipotent isocrystal の射ならば，$f(v_x)$ に $f(v_y)$ が対応する．
(4) 別の unipotent isocrystal E' について $v'_x \in E'(\,]x[\,)$ と $v'_y \in E'(\,]y[\,)$ が対応するならば，$v_x \otimes v'_x \in E \otimes E'(\,]x[\,)$ と $v_y \otimes v'_y \in E \otimes E'(\,]y[\,)$ が対応する．
(5) この対応は Frobenius endomorphism と compatible である．即ち，x, y を固定する Frobenius endomorphism F に対して，以下の可換図式がある：

$$\begin{array}{ccc} \omega_x(E) & \xrightarrow{\gamma_{\omega_x,\omega_y}(E)} & \omega_y(E) \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ \omega_x(F^*E) & \xrightarrow[\gamma_{\omega_x,\omega_y}(F^*E)]{} & \omega_y(F^*E) \end{array}$$

縦の同型は補題 3.22 によるものである．
(6) v_x が v_y に対応し，（別の点 $z \in X_0(\kappa)$ に対して）v_y が v_z に対応するならば，v_x は v_z に対応する．

証明. 定理 3.19 を，特に各点 $x \in X_0(\kappa)$ が与えるファイバー関手 ω_x の場合に対して書き下しただけに過ぎない．補題 3.21 によって，任意の $y \in X_0(\kappa)$ に対して v_x に対応する v_y がとれることに注意する． □

定義 3.24. 定理 3.19 によって与えられる $\gamma_{\omega_1,\omega_2}$ を **Frobenius invariant path** といい，$v_2 = \gamma_{\omega_1,\omega_2}(v_1)$ の関係にある 2 つの元 $v_1 \in \omega_1(E), v_2 \in \omega_2(E)$ は**解析接続**されている，という．

なお，系 3.23 (5) は，Frobenius endomorphism 以外でも同様の性質が成り立つ：

命題 3.25. $f : X'_0 \to X_0$ を $f(x') = x, f(y') = y$ を満たす射とする．このとき，以下の可換図式がある：

$$\begin{array}{ccc} \omega_x(E) & \xrightarrow{\gamma_{\omega_x,\omega_y}(E)} & \omega_y(E) \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ \omega_{x'}(f^*E) & \xrightarrow[\gamma_{\omega_{x'},\omega_{y'}}(f^*E)]{} & \omega_{y'}(f^*E) \end{array}$$

証明. 絶対 Frobenius の性質から，X と Y の Frobenius endomorphism F_X, F_Y を適切にとる

ことで，$F_Y \circ f = f \circ F_X$ とできる．このとき，

$$F_X^* f^*(\gamma_{\omega_{x'},\omega_{y'}}) = (f \circ F_X)^*(\gamma_{\omega_{x'},\omega_{y'}}) = (F_Y \circ f)^*(\gamma_{\omega_{x'},\omega_{y'}}) = f^* F_Y^*(\gamma_{\omega_{x'},\omega_{y'}}) = f^* \gamma_{\omega_{x'},\omega_{y'}}$$

より，$f^*(\gamma_{\omega_{x'},\omega_{y'}})$ は F_X^* で固定されるので，$f^*(\gamma_{\omega_{x'},\omega_{y'}}) = \gamma_{\omega_x,\omega_y}$ が成り立つ． □

3.2.5 Coleman 関数の定義

ここでは，$\kappa = \overline{\mathbb{F}}_p$ を課す．$T = (X_0, Y_0, P)$ を rigid triple とする．$A(T) = \Gamma(]Y_0[, j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[})$，$\Omega^i(T) = \Gamma(]Y_0[, j^\dagger \Omega^i_{]Y_0[})$ とし，$j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群 $\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{F}(T) = \Gamma(]Y_0[, \mathcal{F})$ とする．

定義 3.26. $\mathcal{F}$ を局所自由 $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群とする．T 上 $\mathcal{F}$ 値**抽象 Coleman 関数**のなす圏 $\mathsf{A}_{\mathsf{abs}}(T, \mathcal{F})$ を次のように定義する：

- 対象は，三つ組 (M, s, y) である．ここで，
  - $M = (M, \nabla)$ は T 上の過収束 isocrystal ,
  - $s \in \mathrm{Hom}(M, \mathcal{F})$（必ずしも接続と compatible でない $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群としての射），
  - $y = (y_x)_{x \in X_0(\kappa)}$ は，定義 3.24 によって互いに解析接続されている元

  である．
- $f : (M, s, y) \to (M', s', y')$ が射であるとは，$f : M \to M'$ が過収束 isocrystal の射であり，$s' \circ f = s$ かつ，任意の $x \in X_0(\kappa)$ に対して $f(y_x) = y'_x$ が成り立つもののことをいう．

定義 3.27. 2 つの T 上 $\mathcal{F}$ 値抽象 Coleman 関数 $(M_1, s_1, y_1), (M_2, s_2, y_2)$ の和（$\mathcal{F}$ 値）を

$$(M_1, s_1, y_1) \oplus (M_2, s_2, y_2) = (M_1 \oplus M_2, s_1 + s_2, (y_1, y_2))$$

で定義する．また，T 上 $\mathcal{F}$ 値抽象 Coleman 関数 (M_1, s_1, y_1) と $\mathcal{G}$ 値抽象 Coleman 関数 (M_2, s_2, y_2) のテンソル積（$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ 値）を

$$(M_1, s_1, y_1) \otimes (M_2, s_2, y_2) = (M_1 \otimes M_2, s_1 \otimes s_2, y_1 \otimes y_2)$$

で定義する．

定義 3.28. T 上 $\mathcal{F}$ 値 **Coleman 関数** 全体の集合 $A_{\mathrm{Col}}(T, \mathcal{F})$ を，圏 $\mathsf{A}_{\mathsf{abs}}(T, \mathcal{F})$ の連結成分全体の集合として定義する．$\mathsf{A}_{\mathsf{abs}}(T, \mathcal{F})$ の対象 (M, s, y) に対応する $A_{\mathrm{Col}}(T, \mathcal{F})$ の元を，$[M, s, y]$ とかく．また，

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{Col}}(T) &:= A_{\mathrm{Col}}(T, j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}), \\ \Omega^i_{\mathrm{Col}}(T) &:= A_{\mathrm{Col}}(T, j^\dagger \Omega^i_{]Y_0[}), \\ \Omega^i_{\mathrm{Col}}(T, \mathcal{F}) &:= A_{\mathrm{Col}}(T, \mathcal{F} \otimes_{j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}} j^\dagger \Omega^i_{]Y_0[}) \end{aligned}$$

とする．

命題 3.29. 抽象 Coleman 関数の加法は $A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F})$ に加法を誘導し，これによって $A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F})$ は可換群となり，また，$\alpha \in K$ に対して

$$\alpha \cdot [M,s,y] = [M,s,\alpha y]$$

と定めることによって K ベクトル空間となる．さらに，抽象 Coleman 関数のテンソル積は双線型写像

$$A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F}) \times A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{G}) \to A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})$$

を誘導し，これによって $A_{\mathrm{Col}}(T)$ は K 代数となる．

証明. 例えば，抽象 Coleman 関数の射 $(M_1,s_1,y_1) \to (N_1,t_1,z_1)$ と $(M_2,s_2,y_2) \to (N_2,t_2,z_2)$ があると，$(M_1\oplus M_2, s_1+s_2, (y_1,y_2)) \to (N_1\oplus N_2, t_1+t_2, (z_1,z_2))$ が誘導される．このような式から $A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F})$ の加法が well-defined に定まる．他も同様である． □

定義 3.30. $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群の準同型とする．このとき，関手 $f_* : \mathsf{A}_{\mathsf{abs}}(T,\mathcal{F}) \to \mathsf{A}_{\mathsf{abs}}(T,\mathcal{G})$ を $f_*(M,s,y) = (M, f\circ s, y)$ によって定義する．これは，写像 $f_* : A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F}) \to A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{G})$ を誘導する．

$(E,\nabla_E),(F,\nabla_F)$ を 2 つの接続とする．このとき，$f\in \mathrm{Hom}(E,F)$ に対して，

$$(\nabla_{\mathrm{Hom}(E,F)}f)(e) := \nabla_F(f(e)) - (f\otimes \mathrm{id}_{\Omega^1})\circ\nabla_E(e) \quad (e\in E)$$

によって，$\nabla_{\mathrm{Hom}(E,F)}f \in \mathrm{Hom}(E, F\otimes j^\dagger\Omega^1_{]Y_0[})$ が定まる．

定義 3.31. (F,∇_F) を T 上の接続，(M,∇_M) を T 上の unipotent isocrystal とする．$\nabla[M,s,y] = [M, \nabla_{\mathrm{Hom}(M,F)}s, y]$ と定めることによって，de Rham 微分 $\nabla : \Omega^i_{\mathrm{Col}}(T,F) \to \Omega^{i+1}_{\mathrm{Col}}(T,F)$ が定義される．∇_F が可積分であるなら，∇ によって

$$A_{\mathrm{Col}}(T,F) \to \Omega^1_{\mathrm{Col}}(T,F) \to \Omega^2_{\mathrm{Col}}(T,F) \to \cdots$$

は複体となる．これを，**Coleman-de Rham 複体**という．

定義 3.32. $f : T' \to T$ を rigid triple の射とする．このとき，抽象 Coleman 関数の引き戻し f^* を

$$f^* : \mathsf{A}_{\mathsf{abs}}(T,\mathcal{F}) \to \mathsf{A}_{\mathsf{abs}}(T', f^*\mathcal{F}); \quad f^*(M,s,y) = (f^*M, f^*s, f^*y)$$

で定義する．命題 3.25 によって，解析接続によって対応する元は引き戻しでも対応し合うので well-defined である．これは，K 線形写像 $f^* : A_{\mathrm{Col}}(T,F) \to A_{\mathrm{Col}}(T', f^*F)$ を誘導する．さらに，特に $f^* : A_{\mathrm{Col}}(T) \to A_{\mathrm{Col}}(T')$ は環準同型となり，$f^*\Omega^i_{\mathrm{Col}}(T) \to \Omega^i_{\mathrm{Col}}(T')$ は de Rham 微分と compatible である．

補題 3.33. X_0 が 1 点 x で，$(M,s,y)\in \mathsf{A}_{\mathsf{abs}}(T,\mathcal{F})$ であるとする．このとき，$\theta_x((M,s,y)) := s(y_x) \in \mathcal{F}(]x[)$ は $\theta_x : A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F}) \to \mathcal{F}(]x[)$ を誘導する．

証明. $\mathsf{A}_{\mathsf{abs}}(T,\mathcal{F})$ の射 $f:(M_1,s_1,y_1)\to(M_2,s_2,y_2)$ があるとすると，$f:M_1\to M_2$ であり，$s_2\circ f=s_1, f(y_1)=y_2$ である．したがって，

$$s_2(y_{2,x})=s_2(f(y_{1,x}))=s_1(y_{1,x})$$

であるから，θ_x は Coleman 関数の代表元の取り方に依らず定まっている． □

定義 3.34. T 上 $\mathcal{F}$ 値局所解析関数の集合を $A_{\mathrm{loc}}(T,\mathcal{F}) := \prod_{x\in X_0(\kappa)}\mathcal{F}(\,]x[\,)$ と定める．$A_{\mathrm{loc}}(T,j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})$ は環となる．また，$\Omega^i_{\mathrm{loc}}(T,\mathcal{F}):=A_{\mathrm{loc}}(T,\mathcal{F}\otimes j^\dagger\Omega^i_{]Y_0[})$ とする．

定義 3.35. $\theta:A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F})\to A_{\mathrm{loc}}(T,\mathcal{F})$ を，

$$f\mapsto(\theta_x(x^*f))_{x\in X_0(\kappa)}$$

で定める．これは K 線形で，$\mathcal{F}=j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$ のときは環準同型である．

命題 3.36. $\mathcal{F}$ 上の接続 ∇ が与えられると，de Rham 微分 $\nabla:\Omega^i_{\mathrm{loc}}(T,\mathcal{F})\to\Omega^{i+1}_{\mathrm{loc}}(T,\mathcal{F})$ が与えられ，以下の図式が可換となる：

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^i_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^{i+1}_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F}) \\
\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\
\Omega^i_{\mathrm{loc}}(T,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^{i+1}_{\mathrm{loc}}(T,\mathcal{F})
\end{array}$$

証明. 可換性を示す.

$$\begin{aligned}
\nabla\theta[M,s,y] &= \nabla((\theta_x[x^*M,x^*s,x^*y])_{x\in X_0(\kappa)}) \\
&= \nabla((s(y_x))_{x\in X_0(\kappa)}) \\
&= (\nabla(s(y_x)))_{x\in X_0(\kappa)}
\end{aligned}$$

であり，一方で，

$$\begin{aligned}
\theta_x\nabla[M,s,y] &= \theta_x([M,\nabla s,y]) \\
&= (\nabla s)(y_x) \\
&= \nabla(s(y_x))-(s\otimes\mathrm{id})(\nabla(y_x)) \\
&= \nabla(s(y_x))
\end{aligned}$$

であるから，主張が示された. □

命題 3.37. $T_x=(x,Y,P)$ とする．任意の $x\in X_0(\kappa)$ に対して，

$$A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F})\xrightarrow{x^*}A_{\mathrm{Col}}(T_x,\mathcal{F})\xrightarrow{\theta_x}\mathcal{F}(\,]x[\,)$$

は単射である.

証明. $\theta_x x^*[M,s,y]=0$ 即ち $s(y_x)=0$ であるとする．$M_s=\nabla^{-\infty}\operatorname{Ker}s$ とおく．y_x は horizontal であるので，補題 3.7 より $y_x\in M_s(\,]x[\,)$ である．系 3.23(3) を用いると，$y_z\in$

$M_s(\,]z[\,)$ が任意の $z \in X_0(\kappa)$ に対して成り立つ．従って，$(M_s, 0, y)$ が抽象 Coleman 関数となり，包含写像 $M_s \to M$ によって $[M_s, 0, y] = [M, s, y]$ である．さらに，零写像によって $[M_s, 0, y] = [0, 0, 0] = 0$ であるから，$[M, s, y] = 0$ である． □

系 3.38. f を Coleman 関数とする．ある $]X_0[$ の admissible open U 上で $\theta(f)|_U \equiv 0$ であるならば，$\theta(f) \equiv 0$ であり，$f = 0$ である．

証明. $]x[\cap U \neq \emptyset$ なる $x \in X_0(\kappa)$ がとれる．$]x[$ は affinoid の逆極限ゆえ一致の定理が成り立って，$\theta_x(x^* f) = \theta(f)|_{]x[} \equiv 0$ である．命題 3.37 より，$f = 0$ である．よって，$\theta(f) \equiv 0$ である． □

系 3.39. $d : A_{\mathrm{Col}}(T) \to \Omega^1_{\mathrm{Col}}(T)$ の核は K である．

証明. $c \in K$ は，$[j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}, \mathrm{id}, c]$ として $A_{\mathrm{Col}}(T)$ の元としてみなすことができることに注意する．$d[M, s, y] = 0$ とすると，$[M, ds, y] = 0$ である．従って，$\theta[M, ds, y] = 0$ であるから，任意の $x \in X_0(\kappa)$ に対して，$(ds)(y_x) = 0$ である．$d(s(y_x)) - (s \otimes \mathrm{id}) \circ d(y_x) = 0$ で，y_x は horizontal であるから，$d(s(y_x)) = 0$ である．以下 1 つの $x \in X_0(\kappa)$ に着目すると，$s(y_x)$ は定数 $c \in K$ である．$s(y_x) = \theta_x \circ x^*[M, s, y]$ であるから，$\theta_x \circ x^*[M, s, y] = c$ である．一方で，$\theta_x \circ x^*[j^\dagger \mathcal{O}_{]Y[}, \mathrm{id}, c] = c$ でもあるから，命題 3.37 より，$[M, s, y] = [j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}, \mathrm{id}, c]$ である． □

定理 3.40. (F, ∇_F) を T 上の unipotent isocrystal とする．このとき，

$$A_{\mathrm{Col}}(T, F) \to \Omega^1_{\mathrm{Col}}(T, F) \to \Omega^2_{\mathrm{Col}}(T, F)$$

は完全である．

証明. 複体であることは, 定義 3.31 でみた．$[E, \omega, y] \in \Omega^1_{\mathrm{Col}}(T, F)$ に対して, $\nabla[E, \omega, y] = 0$ であると仮定する．ここで，$\omega \in \mathrm{Hom}(E, F \otimes j^\dagger \Omega^1_{]Y_0[})$ である．$j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群として $M = E \oplus F$ とし，$\nabla_M(e, f) = (\nabla_E(e), \nabla_F(f) - \omega(e))$ とする．これは M 上の接続である．$\pi_1 : M \to E, \pi_2 : M \to F$ を射影とする．π_1 は horizontal（即ち，∇ と可換）であることに注意しよう．$\mathsf{Conn}(\,]Y_0[\,)$ における完全列

$$0 \to F \to M \to E \to 0$$

を考えれば，M が unipotent isocrystal であることがわかる．

$N = M^{\mathrm{int}}$ とする．$x_0 \in X_0(\kappa)$ をとる．仮定より $[E, \nabla\omega, y] = 0$ であるから, $\theta_{x_0} \circ x_0^*$ の像を考えて，$\nabla(\omega(y_{x_0})) = 0$ である．$]x_0[$ 上で de Rham 複体は完全であるから，ある $g \in F(\,]x_0[\,)$ が存在して，$\nabla_F(g) = \omega(y_{x_0})$ となる．

そこで，$m_{x_0} := (y_{x_0}, g) \in M(\,]x_0[\,)$ とすると，

$$\nabla_M(m_{x_0}) = (\nabla_E(y_{x_0}), \nabla_F(g) - \omega(y_{x_0})) = 0$$

ゆえ，$m_{x_0} \in N(\,]x_0[\,)$ である．m_{x_0} を Frobenius で解析接続して，$m = (m_x)_{x \in X_0(\kappa)}$ を得る．

このとき，$\nabla[N,\pi_2,m]=[E,\omega,y]$ であることを示そう．

$$\begin{aligned}\nabla(\pi_2)(e,f)&=\nabla(\pi_2(e,f))-(\pi_2\otimes\mathrm{id})\circ\nabla(e,f)\\&=\nabla_F(f)-(\pi_2\otimes\mathrm{id})(\nabla_E(e),\nabla_F(f)-\omega(e))\\&=\nabla_F(f)-(\nabla_F(f)-\omega(e))\\&=\omega(e)\end{aligned}$$

であるから，

$$\nabla[N,\pi_2,m]=[N,\nabla(\pi_2),m]=[N,\omega\circ\pi_1,m]$$

である．$i:N\to M$ を包含写像とすると，$\pi_1\circ i(m_{x_0})=y_{x_0}$ である．したがって，系 3.23(3) より，$N\xrightarrow{i}M\xrightarrow{\pi_1}E$ によって（x_0 以外の点に対しても）m と y が対応し，$[N,\omega\circ\pi_1,m]=[E,\omega,y]$ である．よって，$\nabla[N,\pi_2,m]=[E,\omega,y]$ が示された． □

以上 2 つの命題によって，特に Coleman 関数の積分

$$\int: A_{\mathrm{Col}}(T,j^\dagger\Omega^1_{]Y_0[})^d\to A_{\mathrm{Col}}(T,j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})/K \tag{3.3}$$

が定義された（ここで $A_{\mathrm{Col}}(T,j^\dagger\Omega^1_{]Y_0[})^d$ は $A_{\mathrm{Col}}(T,j^\dagger\Omega^1_{]Y_0[})$ の horizontal な元全体を表す）．

定義 3.41. 抽象 Coleman 関数 (M,s,y) が**極小**であるとは，以下の 2 条件が成り立つことをいう：

(1) $N\subset M$ が部分 isocrystal で，ある $x\in X$ に対して $y_x\in N(]x[)$ であるならば，$N=M$.
(2) $0\subsetneq N\subset \operatorname{Ker}s$ なる部分 isocrystal N はない．

補題 3.42. 全ての Coleman 関数 $[M,s,y]$ は，極小な抽象 Coleman 関数で代表される．

証明. $N\subset M$ が部分 isocrystal で，$y_x\in N(]x[)$ であるならば，包含写像 $N\to M$ によって，$[N,s|_N,y]=[M,s,y]$ である．このように部分対象で置き換える操作を A とする．また，$N'\subset\operatorname{Ker}s$ であるならば，商写像 $M\to M/N'$ によって，$[M,s,y]=[M/N',s\pmod{N'},y\pmod{N'}]$ である．このように商対象で置き換える操作を B とする．

ここで，(M,s,y) が定義 3.41(1) を満たすと仮定したときに，操作 B を施して $(M/N',s\ (\mathrm{mod}\,N'),y\ (\mathrm{mod}\,N'))$ としても定義 3.41(1) を満たすことを示す．$N'\subset L\subset M$ をとり，ある x に対して $y_x\ (\mathrm{mod}\,N')\in L/N'$ であると仮定する．このとき，$y_x\in L$ となるが，仮定から $L=M$ である．すなわち，$M/N'=L/N'$ である．従って，$(M/N',s\ (\mathrm{mod}\,N'),y\ (\mathrm{mod}\,N'))$ も定義 3.41(1) を満たす．

さて，定理の主張を示そう．M の $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群としての rank を r とする．$r=1$ のとき，(M,s,y) 自身が極小な抽象 Coleman であることは明らかである．$r>1$ のときも，可能な限り操作 A を施した後に可能な限り操作 B を施せば，前述したことにより，極小な抽象 Coleman 関数を得ることができる． □

命題 3.43. 与えられた抽象 Coleman 関数を代表する極小な抽象 Coleman 関数は，ただ 1 つの同型によってただ 1 つに存在する．

証明. (M_i, s_i, y_i) $(i = 1, 2)$ が同じ Coleman 関数を代表しているとする．したがって，$[M_1 \oplus M_2, s_1 - s_2, (y_1, y_2)] = 0$ である．よって，命題 3.37 より，任意の $x \in X_0(\kappa)$ に対して，$(s_1 - s_2)(y_{1,x}, y_{2,x}) = 0$ である．

$N = \nabla^{-\infty} \operatorname{Ker}(s_1 - s_2)$ とすると，系 3.9 より，$(y_{1,x}, y_{2,x}) \in N(\,]x[\,)$ である．$\pi_i : N \to M_i$ $(i = 1, 2)$ を射影とする．このとき，π_1, π_2 が共に同型であることを示そう．

$\operatorname{Ker}\pi_1 \xrightarrow{\pi_2} M_2$ は単射である．(π_1, π_2 は horizontal な射だから) $\pi_2(\operatorname{Ker}\pi_1)$ は M_2 の部分 isocrystal で，$\operatorname{Ker} s_2$ に含まれるから，極小性より，$\operatorname{Ker}\pi_1 = 0$ である．よって，π_1 は単射である．次に，$\pi_1(N)$ は M_1 の部分 isocrystal で，任意の $x \in X_0(\kappa)$ に対して $y_{1,x} \in \pi_1(N)(\,]x[\,)$ であるから，極小性より $\pi_1(N) = M_1$ である．よって，π_1 は全射でもあり，したがって同型であることが示された．π_2 に関しても同様である．

この同型 π_1, π_2 によって，$(N, s_i, (y_1, y_2)) \xrightarrow{\sim} (M_i, s_i, y_i)$ $(i = 1, 2)$ が誘導される．N 上では，$s_1 = s_2$ であるから，$(M_1, s_1, y_1) \cong (M_2, s_2, y_2)$ である．

α_1, α_2 が $(M_1, s_1, y_1) \to (M_2, s_2, y_2)$ なる射であるとすると，$\operatorname{Ker}(\alpha_1 - \alpha_2)$ は M_1 の部分 isocrystal で，y_1 を含むから，$\operatorname{Ker}(\alpha_1 - \alpha_2) = M_1$ である．すなわち，$\alpha_1 = \alpha_2$ である． □

3.2.6 Coleman 理論と Besser 理論の整合性

定義 3.44. $X \subset Y$ を $\mathcal{V}$ スキームの open immersion で，X は smooth で Y は完備であるとする．(X, Y) に付随する rigid triple を $T_{(X,Y)} := (X \otimes_{\mathcal{V}} \kappa, Y \otimes_{\mathcal{V}} \kappa, \widehat{Y})$ とする ($\widehat{Y}$ は Y の p 進完備化である)．このような rigid triple を，**tight** rigid triple という．tight rigid triple $T_{(X,Y)}$ が **affine** とは，X が affine であるようなものをいう．

補題 3.45. T が affine rigid triple で，E は T 上の unipotent isocrystal であるとする．このとき，E は $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群として自由である．

証明. (X_0, Y_0, P) が affine であるとき，X^{rig} は affinoid で，$]X_0[$ の strict neighborhood である．したがって，$V_\lambda :=]Y_0[\setminus]Y_0 \setminus X_0[_\lambda$ としたときの $\{V_\lambda \cap X^{\mathrm{rig}}\}_{\lambda \to 1^-}$ は，$]X_0[$ の affinoid strict neighborhood からなる基底である ($]Y_0 \setminus X_0[_\lambda$ については，[Ber96, (1.1.8)])．よって，主張が補題 2.3 から従う． □

定義 3.46. T を affine rigid triple とする．整数 $n \geq 0$ に対して，$A_{\mathrm{Col}}(T)$ の部分集合 $I_n(T)$ を，

- $I_0(T) = A(T) = \Gamma(\,]Y_0[\,, j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[})$
- $I_{n+1}(T) = A(T) \cdot \{f \in A_{\mathrm{Col}}(T) \mid df \in \Omega^1(T) \cdot I_n(T)\}$

で定める．

注意 3.47. $A(T)$ の元 a は，$[j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}, (a \text{ 倍写像}), 1]$ として $A_{\mathrm{Col}}(T)$ の元とみなす．

定義 3.48. $\mathcal{F}$ を局所自由 $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群とする．整数 $n \geq 0$ に対して，$A_{\mathrm{Col}}(T)$ の部分集合 $L_n(T,\mathcal{F})$ を，$[E,s,y]$ であって，E が，各 F_i/F_{i+1} が自明であるような部分 isocrystal による filtration $E = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_{n+1} = 0$ をもつもの全体の集合とする．

補題 3.49. $L_n(T,\mathcal{F})$ は $A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F})$ の部分 $A(T)$ 加群で，

$$A_{\mathrm{Col}}(T,\mathcal{F}) = \bigcup_{n\geq 0} L_n(T,\mathcal{F})$$

である．

証明. Coleman 関数 $[E,s,y]$ の E が unipotent であることから明らか． □

定理 3.50. T を affine rigid triple とする．このとき，

$$L_n(T,\mathcal{F}) = I_n(T)\cdot\mathcal{F}(T)$$

が成り立つ．特に，$L_n(T, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}) = I_n(T)$ である．

証明. $[E,s,y] \in L_n(T,\mathcal{F})$ とする．T は affine であるから，補題 3.45 より．E は自由 $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$ 加群である．E の基底を $e_1, e_2, ..., e_k$ とする．$i = 1, ..., k$ に対して，$g_i \in \mathrm{Hom}(E, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})$ を $g_i(e_j) = \delta_{ij} \quad (j = 1, ..., k)$ で定め，$r_i = s(e_i) \in \mathcal{F}(T)$ とすることで，

$$s = \sum_{i=1}^{k} g_i \cdot r_i$$

とかける．すると，

$$[E,s,y] = \bigoplus_{i=1}^{k}([E,g_i,y]\otimes[j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}, r_i, 1])$$

となる．従って，$[E,g_i,y] \in I_n(T)$ が示されれば，$L_n(T,\mathcal{F}) \subset I_n(T)\cdot\mathcal{F}(T)$ が示されることとなる．

また，$L_n(T,\mathcal{F}) \supset I_n(T)\cdot\mathcal{F}(T)$ についても，$L_n(T, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})\cdot\mathcal{F}(T) \subset L_n(T,\mathcal{F})$ より上同様に考える．以上から，定理の証明は $\mathcal{F}(T) = j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}$ の場合に帰着する．

以下，$L_n(T, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}) = I_n(T)$ を n に関する帰納法で示す．

$n = 0$ について，$A(T) \subset L_0(T, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})$ は明らか．逆に，$[\mathbb{1}^{\oplus k}, s, y] \in L_0(T, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})$ に対して，$p_i : \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{1} \to \mathbb{1}$ を第 i 成分への射影，$s_i : \mathbb{1} \to \mathbb{1}$ を $s_i(1) = s(0, ..., 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, ..., 0)(=: a_i)$ で定めると，

$$\left[\bigoplus_{i=1}^{k}\mathbb{1}, s, y\right] = \bigoplus_{i=1}^{k}[\mathbb{1}, s_i, p_i(y)] = \bigoplus_{i=1}^{k}[\mathbb{1}, a_i, 1]\otimes[\mathbb{1}, 1, p_i(y)]$$

である．$\nabla[\mathbb{1}, 1, p_i(y)] = 0$ より $[\mathbb{1}, 1, p_i(y)] \in K$ だから，$\left[\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{1}, s, y\right]$ は $A(T)$ の元である．

$n \geq 1$ とする．$[E,s,y] \in L_n(T, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})$ をとる．完全列

$$0 \to E_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi_2} E_2 \to 0$$

で E_1 を自明, E_2 を $E_2 = F_0 \supset \cdots \supset F_n = 0$ なる filtration をもつものと仮定する．E, E_1, E_2 は自由であるから，加群の射としての section $\pi_1 : E \to E_1$ がとれる．$s_i \in \mathrm{Hom}(E_i, j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[})$ を用いて $s = s_1 \circ \pi_1 + s_2 \circ \pi_2$ とかく．対角写像 $E \to E \oplus E; e \mapsto (e, e)$ によって，

$$[E, s, y] = [E \oplus E, (s_1 \circ \pi_1, s_2 \circ \pi_2), (y, y)] = [E, s_1 \circ \pi_1, y] \oplus [E, s_2 \circ \pi_2, y]$$

であるから，$s = s_i \circ \pi_i$ $(i = 1, 2)$ に対して示せば良い．$\pi_2 : (E, s_2 \circ \pi_2, y) \to (E_2, s_2, \pi_2(y))$ によって（但し，π_2 は horizontal で，系 3.23(3) によって $\pi_2(y_x)$ たちは Frobenius で接続していることに注意)，帰納法の仮定より，

$$[E, s_2 \circ \pi_2, y] = [E_2, s_2, \pi_2(y)] \in I_{n-1}(T) \subset I_n(T)$$

である．

また，s_1 が horizontal であるときには,

$$\begin{aligned}
\nabla(s_1 \circ \pi_1)(e_1, 0) &= \nabla((s_1 \circ \pi_1)(e_1, 0)) - ((s_1 \circ \pi_1) \otimes \mathrm{id})(\nabla(e_1, 0)) \\
&= \nabla(s_1(e_1)) - ((s_1 \circ \pi_1) \otimes \mathrm{id})(\nabla(i(e_1))) \\
&= \nabla(s_1(e_1)) - ((s_1 \circ \pi_1 \circ i) \otimes \mathrm{id})(\nabla(e_1)) \\
&= \nabla(s_1(e_1)) - ((s_1 \otimes \mathrm{id})(\nabla(e_1)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

であるから，$\omega_2 \in \mathrm{Hom}(E_2, j^\dagger \Omega^1_{]Y_0[})$ を用いて $\nabla(s_1 \circ \pi_1) = \omega_2 \circ \pi_2$ と表される．すると，

$$\nabla[E, s_1 \circ \pi_1, y] = [E, \omega_2 \circ \pi_2, y] = [E_2, \omega_2, \pi_2(y)] \in L_{n-1}(T, j^\dagger \Omega^1_{]Y_0[}) = I_{n-1}(T)$$

よって，$[E, s_1 \circ \pi_1, y] \in I_n(T)$ である．

続いて，s_1 が horizontal とは限らない場合を考える．$E_1 = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{1}$ とかき，$i = 1, 2, ..., l$ に対して，$q_i : E_1 \to \mathbb{1}$ を射影とする．$a_i \in A(T)$ を用いて $s_1 = \sum a_i \cdot q_i$ とかいたとき，$[E_1, q_i, y]$ は q_i が horizontal であることから，$I_n(T)$ の元であり，$a_i \in A(T)$ であるから $[E, s_1 \circ \pi_1, y] \in I_n(T)$ である． □

系 3.51.

$$A_{\mathrm{Col}}(T) = \bigcup_{n \geq 0} I_n(T)$$

が成り立つ．

証明. 定理 3.50 において $\mathcal{F} = j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}$ としたものと，補題 3.49 より従う． □

以下，3.1 節の設定（[Col82] の設定）において考える．$Y = \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}, X = \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \setminus \{s_0, ..., s_d\}$（但し，$s_0, ..., s_d$ は reduction が互いに異なる）として，$T = T_{(X,Y)}$，$U = \varinjlim_{\lambda \to 1^-} U_\lambda$ とする．集合 $M_i(U) (\subset A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U))$,$W_i(U) (\subset A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U) \otimes \Omega^\dagger(U))$ を帰納的に以下の関係式によって定める：

- $W_0 = dA^\dagger(U)$,
- $i \geq 0$ に対して，$M_i(U) = A^\dagger(U) \cdot \int_{(\varpi)} W_i(U)$,

- $W_{i+1}(U) = M_i(U)dz$.

そして，$M(U) = \bigcup_{i \geq 0} M_i(U)$，$W(U) = \bigcup_{i \geq 0} W_i(U)$ とする．

定理 3.52. 上の状況で，環同型

$$\tilde{\theta} : A_{\mathrm{Col}}(T) \to M(U)$$

と同型

$$\tilde{\theta} : \Omega^1_{\mathrm{Col}}(T) \to W(U)$$

であって，$d \circ \tilde{\theta} = \tilde{\theta} \circ d$ が成り立ち，かつ，$f \in A_{\mathrm{Col}}(T)$ または $f \in \Omega_{\mathrm{Col}}(T)$ に対して，$\tilde{\theta}(f)|_{]X_0[} = \theta(f)$ が成り立つようなものが存在する．

証明. 定理 3.14 によって Coleman 関数を，$[N, s, y]$ であって $y = (y_x)_{x \in Y_0(\kappa)}$ が $x \in (Y_0 \setminus X_0)(\kappa)$ に対しては $y_x \in N(\,]x[\cap U)[\log^{\varpi} t]$ となるものに bad reduction の場合も含めて拡張することができる（t は $]x[$ の局所座標）．さらに，θ も，$\tilde{\theta} : A_{\mathrm{Col}}(T) \to A^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U)$ に拡張することができる（$A^{\varpi}_{\mathrm{loc}}(U)$ については 3.1 節参照，微分形式についても同様）．θ が単射であったから，$\tilde{\theta}$ も単射である．以下，$\tilde{\theta}$ がそれぞれ $M(U), W(U)$ への全射であることを示そう．そのためには

$$\tilde{\theta}(I_n(T)) = M_n(U), \tilde{\theta}(I_n(T) \cdot \Omega^1(T)) = W_{n+1}(U) \quad (n \geq 0)$$

であることを示せばよい．

$n = 0$ のとき，示すべきは

$$\tilde{\theta}(A(T)) = A^{\dagger}(U), \tilde{\theta}(\Omega^1(T)) = \Omega^{\dagger}(U)$$

であるが，これは $\widetilde{\theta}$ の拡張の仕方から明らか．

$n \geq 1$ とする．まず，$f \in A_{\mathrm{Col}}(T)$ で $df \in I_{n-1}(T) \cdot \Omega^1(T)$ なるものをとる．$d(\tilde{\theta}(f)) = \tilde{\theta}(df)$ より，$\tilde{\theta}(f) = \int_{(\varpi)} \tilde{\theta}(df) + \mathrm{const}$. であるが，帰納法の仮定より $\tilde{\theta}(df) \in W_n(U)$ であるから，$\tilde{\theta}(f) \in M_n(U)$ である．$I_n(T)$ は $A(T)$ 上このような f で生成される．$\tilde{\theta}$ は環準同型であることから，

$$\tilde{\theta}(A(T) \cdot f) \subset \tilde{\theta}(A(T)) \cdot \tilde{\theta}(f) \subset A^{\dagger}(U) \cdot \tilde{\theta}(f) \subset M_n(U)$$

であるから $\tilde{\theta}(I_n(T)) \subset M_n(U)$ が示された．

逆に $f \in M_n(U)$ で $df \in W_n(U)$ なるものをとる．帰納法の仮定より $\omega \in I_{n-1}(T) \cdot \Omega^1(T)$ を用いて $df = \tilde{\theta}(\omega)$ とおける．$\int_{(\varpi)} \omega \in I_n(T)$ であるから，

$$df = \tilde{\theta}\left(d \int_{(\varpi)} \omega\right) = d\tilde{\theta}\left(\int_{(\varpi)} \omega\right)$$

である．従って，$f = \tilde{\theta}\left(\int_{(\varpi)} \omega\right) + \mathrm{const} \in \tilde{\theta}(I_n(T))$ である．$\tilde{\theta}$ が環準同型であることから $\tilde{\theta}(I_n(T)) \supset M_n(U)$ が示された．$\tilde{\theta}(I_n(T) \cdot \Omega^1(T)) = W_{n+1}(U)$ についても同様である． □

3.3 Besser と Furusho による接基点の構成

3.3.1 residue functor と接基点の構成

Y を smooth $\mathcal{O}_K$-scheme とする．$D := Y \setminus X = \sum_{i\in I} D_i$ を正規交差因子とし，各 D_i は smooth であるとする．$J \subset I$ に対して，以下のように定義する．

- $D_J := \bigcap_{j\in J} D_j$
- N_J : D_J に対する normal bundle　すなわち，$D_J \subset Y$ がイデアル $\mathcal{I}$ で定義されているときに，$\underline{\mathrm{Spec}}_{D_J}\left(\mathrm{Sym}\,\mathcal{I}/\mathcal{I}^2\right)$ として与えられている．
- $N_J^0 := N_J \setminus \bigcup_{j\in J} N_{J\setminus\{j\}}|_{D_J}$　ただし，$N_\emptyset = 0$ とする．
- $D_J^0 := D_J \setminus \bigcup_{j\in I\setminus J} D_j$
- $N_J^{00} := N_J^0|_{D_J^0}$

$i \in I$ に対して，v_i を $D_{i,K}$ に付随する $K(Y_K)$ の付値とする．局所的に $D_{i,K} = V(t_i)$ と表されるときに，$\mathcal{O}_{Y_K}(D_K^{-1}) = \mathcal{O}_{Y_K}\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{t_i}\right]$ とする．$\chi = (\chi_j)_{j\in J} \in \mathbb{Z}^{\oplus J}$ に対して，F_J^χ を $\{f \in \mathcal{O}_{Y_K}(D_K^{-1}) \mid v_j(f) \geq \chi_j \ \forall\, j \in J\}$ で生成される $\mathcal{O}_{Y_K}$ 加群として定義することで，$\mathcal{O}_{Y_K}(D_K^{-1})$ 上の multi-filtration F_J を定義する．

さて，$\mathsf{Un}(Y_K, D_K)$ を D_K に対数的特異点をもつ Y_K 上の可積分接続の圏とし，$(M, \nabla : M \to M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(\log D_K)) \in \mathsf{Un}(Y_K, D_K)$ とする．但し，

$$\Omega^1_{Y_K}(\log D_K) = \Omega^1_{Y_K} + \sum_{i\in I}\mathcal{O}_{Y_K}\frac{dt_i}{t_i}$$

である．また，

$$\Omega^1_{Y_K}(D_K^{-1}) := \Omega^1_{Y_K}(\log D_K) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \mathcal{O}_{Y_K}(D_K^{-1}) \text{ に filtration } \left(\Omega^1_{Y_K}(\log D_K) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} F_J^\chi\right)_\chi,$$

$$M(D_K^{-1}) := M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \mathcal{O}_{Y_K}(D_K^{-1}) \text{ に filtration } \left(M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} F_J^\chi\right)_\chi,$$

$$M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(D_K^{-1}) \text{ に filtration } \left(M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(\log D_K) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} F_J^\chi\right)_\chi$$

を入れる．

命題 3.53. $d : \mathcal{O}_{Y_K} \to \Omega^1_{Y_K}$ および $\nabla : M \to M \otimes \Omega^1_{Y_K}(\log D_K)$ より誘導される $d : \mathcal{O}_{Y_K}(D_K^{-1}) \to \Omega^1_{Y_K}(D_K^{-1}), \nabla : M(D_K^{-1}) \to M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(D_K^{-1})$ は filtration を保つ．

証明. 同様であるので，$\nabla : M(D_K^{-1}) \to M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(D_K^{-1})$ について示す．$\mathrm{Spec}\, A \subset Y_K$ をとり，$D_{i,K} \cap \mathrm{Spec}\, A = V(t_i)$ $(t_i \in A)$ と表されるとする．命題 2.3，定理 2.4 と同様にして M は rank n の自由 A 加群 A^n としてよく，$B \in M_n(\Omega^1_{Y_K}(\log D_K))$ を用いて $\nabla = d + B$ と表

せる．$t^\chi = \prod_{j\in J} t_j^{\chi_j}$ とすると，$F_J^\chi = At^\chi$ である．そこで，

$$d\begin{pmatrix} a_1t^\chi \\ \vdots \\ a_nt^\chi \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} a_1t^\chi \\ \vdots \\ a_nt^\chi \end{pmatrix}$$

の評価を行う（$a_1, ..., a_n \in A$）．$a \in A$ とすると，

$$\begin{aligned} d(at^\chi) &= t^\chi \otimes da + \sum_{j\in J}\left(\chi_j t_j{}^{\chi_j - 1}\prod_{i\in J\setminus\{j\}} t_i^{\chi_i}\right) \otimes adt_j \\ &= t^\chi \otimes da + \sum_{j\in J}\left(\chi_j t_j{}^{\chi_j}\prod_{i\in J\setminus\{j\}} t_i^{\chi_i}\right) \otimes a\frac{dt_j}{t_j} \in F_J^\chi \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(\log D_K) \end{aligned}$$

一方で，B の成分をなす $\Omega^1_{Y_K}(\log D_K)$ の元 ω に対して，$t^\chi \otimes \omega \in F_J^\chi \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(\log D_K)$ である．よって，

$$\nabla(M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} F_J^\chi) \subset M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} F_J^\chi \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(\log D_K)$$

である． □

$M(D_K^{-1})^\chi := M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} F_J^\chi$ などと表すこととする．命題 3.53 より，∇ から

$$\nabla : M(D_K^{-1})^\chi / M(D_K^{-1})^{\chi+1} \to \left(M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(D_K^{-1})\right)^\chi / \left(M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(D_K^{-1})\right)^{\chi+1} \quad (3.4)$$

が誘導される．但し，$\sum_{i\in J}\chi'_i = 1 + \sum_{i\in J}\chi_i$ なる multi-index $\chi' = (\chi'_i)$ 全てに対して $M(D_K^{-1})^{\chi'}$ を考え，それらの和を $M(D_K^{-1})^{\chi+1}$ としている（他も同様）．

したがって，(3.4) を χ の J 成分に関して直和をとることで，

$$\mathrm{Gr}_J \nabla : \mathrm{Gr}_J M(D_K^{-1}) \to \mathrm{Gr}_J\left(M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_K}} \Omega^1_{Y_K}(D_K^{-1})\right)$$

が誘導される．但し，$\mathrm{Gr}_J M(D_K^{-1}) := \bigoplus_\chi M(D_K^{-1})^\chi / M(D_K^{-1})^{\chi+1}$ である（他も同様）．

命題 3.54. 上記の設定の下で，$N^{00}_{J,K} = \underline{\mathrm{Spec}}_{D_J}\mathrm{Gr}_J\mathcal{O}_{Y_K}(D_K^{-1})$ である．

証明. $Y_K = \mathrm{Spec}\, A$ として良い．$j \in J$ に対して $D_{j,K} = V(t_j)$，$i \in I \setminus J$ に対して $D_{i,K} = V(u_i)$，$t = \prod_{j\in J} t_j, u = \prod_{i\in I\setminus J} u_i$ とおく．

$$\mathcal{O}_{N_J}(N_J) = \mathrm{Sym}_{A/(t_1,...,t_k)}((t_1, ..., t_k)/(t_1, ..., t_k)^2) = (\mathrm{Sym}_A(t_1, ..., t_k)) \otimes_A A/(t_1, ..., t_k),$$

$$\mathcal{O}_{N_{J\setminus\{j\}}}(N_{J\setminus\{j\}}) = \mathrm{Sym}_{A/(t_1,\overset{j}{\check{\dots}},t_k)}((t_1, \overset{j}{\check{\dots}}, t_k)/(t_1, \overset{j}{\check{\dots}}, t_k)^2) = (\mathrm{Sym}_A(t_1, \overset{j}{\check{\dots}}, t_k)) \otimes_A A/(t_1, \overset{j}{\check{\dots}}, t_k)$$

であるから，$N_{J\setminus\{j\}}|_{D_J}$ は $N_{J\setminus\{j\}}$ の中の $V(1 \otimes t_j)$ で

$$\mathcal{O}_{N_{J\setminus\{j\}}|_{D_J}}(N_{J\setminus\{j\}}|_{D_J}) = (\mathrm{Sym}_A(t_1, \overset{j}{\check{\dots}}, t_k)) \otimes_A A/(t_1, ..., t_k)$$

である．よって，$N_{J\setminus\{j\}}|_{D_J}$ は N_J の中では，$V(t_j\otimes 1)$ であるから，

$$\mathcal{O}_{N_J}(N_J^0)=(\mathrm{Sym}_A(t_1,...,t_k))\left[\frac{1}{t}\right]\otimes_A A/(t_1,...,t_k)=\mathrm{Gr}_J\,A\left[\frac{1}{t}\right]$$

最後に，D_J^0 は D_J の中の $D(u)$ であるから，

$$\mathcal{O}_{N_J}(N_J^{00})=\mathrm{Gr}_J\,A\left[\frac{1}{tu}\right]$$

□

命題 3.54 より，$(\mathrm{Gr}_J\,M(D_K^{-1}),\mathrm{Gr}_J\,\nabla)$ は $N_{J,K}^{00}$ 上の接続を与えている．

定義 3.55. D,J に付随する **residue functor** を

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{D,J}:\mathsf{Un}(Y_K,D_K)&\to\mathsf{Un}(N_{J,K}^{00})\\(M,\nabla)&\mapsto(\mathrm{Gr}_J\,M(D_K^{-1}),\mathrm{Gr}_J\,\nabla)\end{aligned}$$

と定義する．$\mathrm{Res}_{D,J}$ は D,J の両方に依存することに注意する．$\mathrm{Res}_{D,J}$ はテンソル関手である．

命題 3.56. これまでの状況において，$D=D_1\cup D_2$，$D_i=V(t_i)$ $(i=1,2)$ であるとし，N_1 において正規交差因子 $D'=D_1'\cup D_2'$ を考える．但し，t_1,t_2 から誘導される N_1 のパラメータを $\overline{t_1},\overline{t_2}$ としたときに，$D_1'=V(\overline{t_1}),D_2'=V(\overline{t_2})$ とする．このとき，自然な同型 $\psi:N_{D_1'D_2'}^{00}\xrightarrow{\sim}N_{D_1D_2}^{00}$ であって，D_K に対数的特異点をもつ Y_K 上の任意の接続 M に対して，自然な同型 $\psi^*\,\mathrm{Res}_{D,12}\,M\xrightarrow{\sim}\mathrm{Res}_{D',12}\,(\mathrm{Res}_{D,1}\,M)$ を誘導するものがある．

証明. $Y_K=\mathrm{Spec}\,A$ であるとしてよい．

$$\mathcal{O}_{N_{D_1'D_2'}^{00}}(N_{D_1'D_2'}^{00})=\mathrm{Gr}_{12}\left\{\left(\mathrm{Sym}_{A/(t_1)}At_1/At_1^2\right)\left[\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_2}\right]\right\}$$

ここで，

$$\mathrm{Sym}_{A/(t_1)}At_1/At_1^2\cong A/(t_1)\otimes_A\mathrm{Sym}_A(t_1)\cong A/(t_1)[T_1]$$

であるから（T_1 は $t_1\in\mathrm{Sym}_A^1At_1$ の像を表す不定元である），自然な同型

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{N_{D_1'D_2'}^{00}}(N_{D_1'D_2'}^{00})&=\mathrm{Gr}_{12}\,A/(t_1)\left[T_1,\frac{1}{T_1},\frac{1}{t_2}\right]\\&=\bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}}\frac{A/(t_1)[T_1]T_1^it_2^j}{A/(t_1)[T_1]T_1^it_2^{j+1}+A/(t_1)[T_1]T_1^{i+1}t_2^j}\\&\cong\bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}}\frac{A/(t_1)[T_1]}{A/(t_1)[T_1]T_1+A/(t_1)[T_1]t_2}\\&\cong\bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}}A/(t_1,t_2)\\&\cong\mathrm{Gr}_{12}\,A\left[\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_2}\right]\\&=\mathcal{O}_{N_{D_1D_2}^{00}}(N_{D_1D_2}^{00})\end{aligned}$$

がある．これによって，$\psi : N^{00}_{D'_1 D'_2} \xrightarrow{\sim} N^{00}_{D_1 D_2}$ が誘導される． □

3.3.2 弱完備化

しばらく $\mathcal{V}$-scheme Y が affine の状況で考える．$Y = \operatorname{Spec} A$ とし，$D = \bigcup D_i$，$D_i = V(t_i)$ $(t_i \in A)$ とする．

定義 3.57. A の有限表示 $\mathcal{V}[\underline{x}] \to A$ の核を I としたとき，

$$\mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger := \varinjlim_{\lambda \to 1^+} \left\{ \sum a_{\underline{m}} \underline{x}^{\underline{m}} \in \mathcal{V}[[\underline{x}]] \,\middle|\, |a_{\underline{m}}| \lambda^{|\underline{m}|} \xrightarrow{|\underline{m}| \to \infty} 0 \right\}$$
$$A^\dagger := \mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger / I\mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger$$

とおく．$A^\dagger$ を A の**弱完備化**という．これは，有限表示の取り方に依らない．

K 微分 $d : A_K \to A_K \otimes_A \Omega^1_{A/\mathcal{V}}$ が与えられると，$d : A^\dagger_K \to A^\dagger_K \otimes_A \Omega^1_{A/\mathcal{V}}$ に拡張され，複体

$$0 \to A^\dagger_K \to A^\dagger_K \otimes_A \Omega^1_{A/\mathcal{V}} \to A^\dagger_K \otimes_A \Omega^2_{A/\mathcal{V}} \to \cdots \tag{3.5}$$

が与えられる．

定義 3.58. 複体 (3.5) の cohomology を，Y_0 の K 上の **Monsky-Washnitzer cohomology（以後 MW-cohomology）**といい，$H^\bullet_{\mathrm{MW}}(Y_0/K)$（$K$ が明らかであるときは $H^\bullet_{\mathrm{MW}}(Y_0)$）と表す．これは，$Y$ の special fiber Y_0 のみから定まり，Y_0 の lift Y には依らない．

命題 3.59 ([都築 98])**.** Y_0 を κ 上の affine smooth variety とすると，

$$H^\bullet_{\mathrm{rig}}(Y_0) \cong H^\bullet_{\mathrm{MW}}(Y_0)$$

である．

命題 3.60 ([LS07, Proposition 5.1.20])**.** 上の状況で，$Y \subset \mathbb{A}^N_{\mathcal{V}}$ を閉埋め込みとし，$\overline{Y} \subset \mathbb{P}^N_{\mathcal{V}}$ を Y の射影閉包とする．このとき，rigid triple $Y_0 \subset \overline{Y}_0 \subset \widehat{Y}$ を考えることで

$$\Gamma(]\overline{Y}_0[, j^\dagger \mathcal{O}_{]\overline{Y}_0[}) = A^\dagger_K$$

が成り立つ．

$B^\dagger$ を $A\left[\prod_{i \in I} \frac{1}{t_i}\right]$ の弱完備化とする．D_K に対数的特異点をもつ $A^\dagger_K$ の de Rham 複体

$$\mathcal{DR}(A^\dagger_K, D_K) : A^\dagger_K \xrightarrow{d} \Omega^1_{A^\dagger_K}(\log D_K) \to \cdots$$

（ただし，$\Omega^1_{A^\dagger_K}(\log D_K) := A^\dagger_K \otimes_A \Omega^1_{A/\mathcal{V}} + \sum_i A^\dagger_K \frac{dt_i}{t_i}$ とおく）および $B^\dagger_K$ の de Rham 複体

$$\mathcal{DR}(B^\dagger_K) : B^\dagger_K \to B^\dagger_K \otimes_A \Omega^1_{A/\mathcal{V}} \to \cdots$$

を考える．命題 3.59 より，$H^\bullet(\mathcal{DR}(B_K^\dagger)) = H^\bullet_{\mathrm{MW}}((Y\setminus D)_\kappa) = H^\bullet_{\mathrm{rig}}((Y\setminus D)_\kappa)$ であることに注意しよう．canonical な複体の射

$$\mathcal{DR}(A_K^\dagger, D_K) \to \mathcal{DR}(B_K^\dagger) \tag{3.6}$$

がある．

命題 3.61. Frobenius の lift $\varphi : B_K^\dagger \to B_K^\dagger$ であって，$\varphi(A_K^\dagger) \subset A_K^\dagger$ であり，$t_i \mapsto t_i^q$ であるものが存在する．

証明. [Chi98, Remark 3.1.5.] より，Frobenius の lift $\varphi : A^\dagger \to A^\dagger$ であって，$t_i \mapsto t_i^q$ であるものが存在する．$A = \mathcal{V}[\underline{x}]/I$ と表すと，$B_K^\dagger = K[\underline{x}, \underline{y_i}]^\dagger/(I + (t_iy_i - 1)_i)$ であり，$\varphi : A^\dagger \to A^\dagger$ が $\varphi(x) = X$ で定義されているならば，$\varphi(x) = X, \varphi(y_i) = y_i^q$ で定義される $\varphi : B_K^\dagger \to B_K^\dagger$ が（well-defined で）条件を満たす． □

φ は $\Omega^1_{A_K^\dagger}(\log D_K), B_K^\dagger \otimes_A \Omega^1_{A/\mathcal{V}}$ などにも作用し，これらの (3.6) への作用は compatible である．

命題 3.62 ([BF06, Proposition 4.2.])**.** (3.6) から誘導される $H^1(\mathcal{DR}(A_K^\dagger, D_K)) \to H^1(\mathcal{DR}(B_K^\dagger))$ は単射である．

系 3.63. $\varphi : H^1(\mathcal{DR}(A_K^\dagger, D_K)) \to H^1(\mathcal{DR}(A_K^\dagger, D_K))$ は φ の取り方に依らず，また，strictly positive weights をもつ．

証明. 命題 3.20 の証明と同様に，$H^1(\mathcal{DR}(B_K^\dagger)) = H^1_{\mathrm{rig}}((Y\setminus D)_\kappa)$ は strictly positive weights をもつので，命題 3.62 により主張が従う． □

$\mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K)$ を，D に対数的特異点をもつ unipotent 可積分 $A_K^\dagger$-接続の圏とする．すなわち，この圏の対象は，底空間が $A_K^\dagger$ 加群の接続 M で，$\nabla : M \to M \otimes_A \Omega^1_{A/\mathcal{V}} + \sum_i M\frac{dt_i}{t_i}$ の形をしているようなものである．φ の pullback によって，作用

$$\varphi^* : \mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K) \to \mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K)$$

がある．これによって，$\pi_1(\mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K), \omega_1, \omega_2)$ に φ^* が作用する．系 3.63 を用いて定理 3.19 と同様に，次の定理が示される：

定理 3.64. (1) ω_1, ω_2 を $\mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K)$ の φ^*-ファイバー関手とする．このとき，ただ 1 つの $\gamma_{\omega_1,\omega_2} \in \pi_1(\mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K), \omega_1, \omega_2)$ が存在し，$\varphi^*\gamma_{\omega_1,\omega_2} = \gamma_{\omega_1,\omega_2}$ である．さらに ω_3 を別の φ^*-ファイバー関手とすると，結合則 $\gamma_{\omega_2,\omega_3} \circ \gamma_{\omega_1,\omega_2} = \gamma_{\omega_1,\omega_3}$ が成り立つ．

(2) $\gamma_{\omega_1,\omega_2}$ は φ のとり方に依らない．すなわち，ω_1, ω_2 が共に φ_1^*-ファイバー関手であるような別の φ_1 をとっても，$\varphi^*\gamma_{\omega_1,\omega_2} = \gamma_{\omega_1,\omega_2}$ で定まる $\gamma_{\omega_1,\omega_2}$ は $\varphi_1^*\gamma_{\omega_1,\omega_2} = \gamma_{\omega_1,\omega_2}$ を満たす．

v_j を $D_{j,K}$ に付随する $B_K^\dagger$ の付値とする．$\chi = (\chi_j)_{j\in J} \in \mathbb{Z}^{\oplus J}$ に対して，F_J^χ を $\{f \in B_K^\dagger \mid v_j(f) \geq \chi_j \ \forall\, j \in J\}$ で生成される $A_K^\dagger$ 加群として定義することで，$B_K^\dagger$ 上の multi-filtration

F_J を定義する．

さて，$(M,\nabla)\in \mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K)$ をとる．また，

$$\Omega^1_{B_K^\dagger} := \Omega^1_{A_K^\dagger}(\log D_K)\otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger \text{に filtration } \left(\Omega^1_{A_K^\dagger}(\log D_K)\otimes_{A_K^\dagger} F_J^\chi\right)_\chi$$

$$M\otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger \text{に filtration } \left(M\otimes_{A_K^\dagger} F_J^\chi\right)_\chi$$

$$M\otimes_{A_K^\dagger} \Omega_{B_K^\dagger} \text{に filtration } \left(M\otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger}(\log D_K)\otimes_{A_K^\dagger} F_J^\chi\right)_\chi$$

を入れる．

先と同様に，d,∇ は filtration を保つので，

$$\mathrm{Gr}_J\nabla : \mathrm{Gr}_J(M\otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger) \to \mathrm{Gr}_J\left(M\otimes_{A_K^\dagger}\Omega^1_{B_K^\dagger}\right)$$

が誘導される．一方で，$N_J^{00} = \mathrm{Spec}\,\mathrm{Gr}_J B$ である．[LS07, Proposition 8.1.13.] より，圏同値 $\mathsf{Isoc}^\dagger(N^{00}_{J,\kappa}) \cong \mathsf{Conn}^\dagger((\mathrm{Gr}_J B)_K^\dagger)$ があることに注意すると，これによって，$\mathsf{Isoc}^\dagger(N^{00}_{J,\kappa})$ の対象が与えられている．すなわち，これを関手

$$\mathrm{Res}_{D,J} : \mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K) \to \mathsf{Un}^\dagger(N^{00}_{J,\kappa})$$

とする．

$\mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K)$ 上のファイバー関手を定義しよう．$x\in (Y\setminus D)_\kappa$ に対して $\omega_x^\ddagger$ を，制限

$$\mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K) \xrightarrow{\text{制限}} \mathsf{Un}(X_K) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Un}^\dagger(X_0)$$

と $\mathsf{Un}^\dagger(X_0)$ 上のファイバー関手 ω_x の合成で定義し，$y\in N^{00}_{J,\kappa}$ に対して $\omega_y^\ddagger$ を，上で定義した $\mathrm{Res}_{D,J}$ と $\mathsf{Un}^\dagger(N^{00}_{J,\kappa})$ 上のファイバー関手 ω_y の合成で定義する．定理 3.64 によって，これらのファイバー関手の間には，canonical な同型がある．さらにこれらのファイバー関手を制限関手 $\mathsf{Un}(Y_K, D_K)\to \mathsf{Un}(A_K^\dagger, D_K)$ で引き戻すことによって，$\mathsf{Un}(Y_K, D_K)$ 上のファイバー関手を得る．

Y が affine でない場合を考える．affine covering $Y=\bigcup U$ を考え，U それぞれに対して，上記の構成によってファイバー関手を得ることができる．$\mathsf{Un}(X_K)(\cong \mathsf{Un}^\dagger(X_0))$ の good reduction の場合のファイバー関手の間に canonical な同型があったこと（定理 3.19）から，異なる affine U_1, U_2 とその中の $x_1\in (U_1\setminus D)_\kappa, x_2\in (U_2\setminus D)_\kappa$ に対して，affine covering の取り方に依らない canonical な同型 $\omega_{x_1}\cong\omega_{x_2}$ がある．この同型を介することによって，$\mathsf{Un}(Y_K, D_K)$ 上のあらゆるファイバー関手について，canonical な同型があることがわかる．

3.3.3 定数項と接基点での値

ここでは，定義 3.16 の状況で考える．Y_0 が 2 次元の場合を考えよう（1 次元の場合も同様である）．$D = Y_0\setminus X_0$ が $x\in D$ の近傍で，$Y=\mathrm{Spec}\,A$，$D=V(t_1t_2), D_i = V(t_i)$ $(i=1,2), x = V(t_1,t_2)\subset Y_0$ と表されているとする．

命題 3.65. $M \in \mathsf{Un}(Y_K, D_K)$ として，$f \in \omega_x(M)$ を horizontal section とし，これを N_{12}^{00} に解析接続したものを $\mathrm{Res}_{D,12} f$ とする．このとき，

$$\mathrm{const}(f; t_1, t_2) = (\mathrm{Res}_{D,12} f)|_{(\overline{t_1}, \overline{t_2})=(1,1)}$$

である．

証明. $\nabla = d + B$ ($B \in \mathrm{M}_n(\Omega_A^1(\log D_K))$) と表す．このとき，$\mathrm{Res}_{D,12} \nabla = d + \mathrm{Res}_{D,12} B$ であり，$\mathrm{Res}_{D,12} B = B_1 \dfrac{d\overline{t_1}}{\overline{t_1}} + B_2 \dfrac{d\overline{t_2}}{\overline{t_2}}$ ($B_1, B_2 \in M_n(K)$) の形で表せる．$c \in K$ に対して，$g_c := c \exp(-B_1 \log \overline{t_1} - B_2 \log \overline{t_2})$ とおくと（B_1, B_2 は冪零上三角行列であるから exp の展開は有限であることに注意），

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Res}_{D,12} \nabla)(g_c) \\
&= -c \left(B_1 \frac{d\overline{t_1}}{\overline{t_1}} + B_2 \frac{d\overline{t_2}}{\overline{t_2}} \right) \exp(-B_1 \log \overline{t_1} - B_2 \log \overline{t_2}) + \left(B_1 \frac{d\overline{t_1}}{\overline{t_1}} + B_2 \frac{d\overline{t_2}}{\overline{t_2}} \right) g_c \\
&= 0
\end{aligned}$$

となって，g_c は $\mathrm{Res}_{D,12} \nabla$ の horizontal section である．そこで，$c(f) := \mathrm{const}(f, t_1, t_2)$ として，$s \in N_{12,\kappa}^{00}$ に対して，

$$\omega_x(M) \to \omega_s(M); \quad f \mapsto g_{c(f)}$$

は，$\pi_1(\mathsf{Un}(Y_K, D_K), \omega_x, \omega_s)$ の元を定める．これを γ とする．

$$c(f) = g_{c(f)}|_{(\overline{t_1}, \overline{t_2})=(1,1)}$$

であるから，γ が Frobenius invariant path であることを示せれば，$g_{c(f)} = \mathrm{Res}_{D,12} f$ を得て主張が示される．そのためには，図式

$$\begin{array}{ccc}
\omega_x(M) & \xrightarrow{\gamma_M} & \omega_s(M) \\
{\scriptstyle F^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^*} \\
\omega_x(F^*M) & \xrightarrow{\gamma_{F^*M}} & \omega_s(F^*M)
\end{array}$$

の可換性を示せば良い．

$F^*(M, \nabla)$ は，$F^*\nabla = d + F^*B, F^*(t_1) = t_1^p, F^*(t_2) = t_2^p$ によって与えられるとしてよく，$\mathrm{Res}_{D,12} F^*B = pB_1 \frac{d\overline{t_1}}{\overline{t_1}} + pB_2 \frac{d\overline{t_2}}{\overline{t_2}}$ となる．したがって，

$$\gamma_{F^*M} \circ F^*(f) = c(F^*f) \exp(-pB_1 \log \overline{t_1} - pB_2 \log \overline{t_2})$$

$$\begin{aligned}
F^* \circ \gamma_M(f) &= F^*(c(f) \exp(-B_1 \log \overline{t_1} - B_2 \log \overline{t_2})) \\
&= c(f) \exp(-B_1 \log \overline{t_1^p} - B_2 \log \overline{t_2^p})
\end{aligned}$$

で，$c(f) = c(F^*f)$ であることに注意すると，示された． □

3.3.4 代数的起源の Coleman 関数の構成

以下，2 つの関手

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{Un}(Y_K, D_K) & \xrightarrow{\text{制限}} & \mathsf{Un}((Y \setminus D)_K) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Un}^\dagger((Y \setminus D)_\kappa) \\ M & \mapsto & M|_{(Y\setminus D)_K} & \mapsto & j^\dagger M|^{\mathrm{rig}}_{(Y\setminus D)_K} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{Mod}(\mathcal{O}_{Y_K}) & \xrightarrow{\text{制限}} & \mathsf{Mod}((Y \setminus D)_K) & \to & \mathsf{Mod}(j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0[}) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}|_{(Y\setminus D)_K} & \mapsto & j^\dagger \mathcal{F}|^{\mathrm{rig}}_{(Y\setminus D)_K} \end{array}$$

をともに $\bullet^\dagger$ とかくこととする．ここで，$\mathsf{Un}((Y \setminus D)_K) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Un}^\dagger((Y \setminus D)_\kappa)$ は圏同値である ([CLS99, PROPOSITON 2.4.1.])．

定義 3.66. $\mathcal{F}$ を局所自由 $\mathcal{O}_{Y_K}$ 加群とする．Y_K 上 D_K に対数的特異点をもつ $\mathcal{F}$ 値**代数的起源の抽象 Coleman 関数**のなす圏 $\mathsf{A}^{\mathsf{alg}}_{\mathsf{abs}}(Y_K, D_K, \mathcal{F})$ を次のように定義する：

- 対象は，三つ組 (M, s, y) である．ここで，
  - $M = (M, \nabla) \in \mathsf{Un}(Y_K, D_K)$,
  - $s \in \mathrm{Hom}(M, \mathcal{F})$（必ずしも接続と compatible でない $\mathcal{O}_{Y_K}$ 加群としての射），
  - $y = (y_x)_{x \in (Y\setminus D)(\kappa)}$ は，horizontal section $y_x \in M^\dagger(\,]x[\,)$ の集まりで系 3.23 によって解析接続されている

  である．
- $f : (M, s, y) \to (M', s', y')$ が射であるとは，$f : M \to M'$ が接続の射であり，$s' \circ f = s$ かつ，任意の $x \in (Y \setminus D)(\kappa)$ に対して $f^\dagger(y_x) = y'_x$ が成り立つもののことをいう．

定義 3.67. Y_K 上 D_K に対数的特異点をもつ $\mathcal{F}$ 値**代数的起源の Coleman 関数**全体の集合 $A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{F})$ を，圏 $\mathsf{A}^{\mathsf{alg}}_{\mathsf{abs}}(Y_K, D_K, \mathcal{F})$ の連結成分全体の集合として定義する．$\mathsf{A}^{\mathsf{alg}}_{\mathsf{abs}}(Y_K, D_K, \mathcal{F})$ の対象 (M, s, y) に対応する $A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{F})$ の元を $[M, s, y]$ とかく．

定義 3.68. 写像 $\bullet^\dagger : A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{F}) \to A_{\mathrm{Col}}(T, \mathcal{F}^\dagger)$ を，$[M, s, y] \mapsto [M^\dagger, s^\dagger, y]$ と定義する．

定義 3.69. $\theta^{\mathrm{alg}} : A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{F}) \to A_{\mathrm{loc}}(T, \mathcal{F}^\dagger)$ を，$f \mapsto \theta(f^\dagger)$ で定める．

命題 3.70. θ^{alg} は単射である．

証明. $x \in (Y \setminus D)(\kappa)$ を固定する．$\theta^{\mathrm{alg}}[M, s, y] = 0$, 特に x 成分のみに着目して $s^\dagger(y_x) = 0$ であるとする．$M_s = \nabla^{-\infty} \operatorname{Ker} s$ とおく（これは，補題 3.6 と同様に代数的に構成したものである）．$\bullet^\dagger$ は完全関手であるので，$\nabla^{-\infty} \operatorname{Ker}(s^\dagger) = M_s^\dagger$ であることに注意する．y_x は horizontal であるので，補題 3.7 より $y_x \in \nabla^{-\infty} \operatorname{Ker}(s^\dagger) = M_s^\dagger(\,]x[\,)$ である．系 3.23(3) を用いると，$y_z \in M_s^\dagger(\,]z[\,)$ が任意の $z \in X_0(\kappa)$ に対して成り立つ．従って，$(M_s, 0, y)$ が抽象 Coleman 関数となり，包含写像 $M_s \to M$ によって $[M_s, 0, y] = [M, s, y]$ である．さらに，零写像によって $[M_s, 0, y] = [0, 0, 0] = 0$ であるから，$[M, s, y] = 0$ である． □

系 3.71. $\bullet^\dagger$ は単射である．

証明. $\theta^{\mathrm{alg}} = \theta \circ \bullet^\dagger$ であるから，命題 3.70 より $\bullet^\dagger$ は単射である． □

命題 3.72. 次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{O}_{Y_K}) & \xrightarrow{\dagger} & A_{\mathrm{Col}}(T, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}) \\ \nabla\big\downarrow & & \big\downarrow\nabla \\ A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \Omega^1_{Y_K}(\log D_K)) & \xrightarrow{\dagger} & A_{\mathrm{Col}}(T, j^\dagger\Omega^1_{]Y_0[}) \end{array}$$

証明. $[M, s, y] \in A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{O}_{Y_K})$ をとる．

$$(\nabla[M,s,y])^\dagger = [M^\dagger, (\nabla s)^\dagger, y] \ \text{ および } \ \nabla([M,s,y]^\dagger) = [M^\dagger, \nabla(s^\dagger), y]$$

であるから，$(\nabla s)^\dagger = \nabla(s^\dagger)$ を示せばよい．

$$\begin{aligned} (\nabla s)^\dagger &= (d \circ s - (s \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla_M)^\dagger \\ \nabla(s^\dagger) &= d \circ s^\dagger - (s^\dagger \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla_{M^\dagger} \end{aligned}$$

であることに注意する．

局所的にみることで, $Y_K = \mathrm{Spec}\, A$, $D_K = V(t)\,(t \in A)$, $X_K = Y_K \backslash D_K$, $M = \mathcal{O}^n_{Y_K}$ などと表されているとしてよい．$p_i : \mathcal{O}^n_{Y_K} \to \mathcal{O}_{Y_K}$ を第 i 成分への射影とする．$s(0,...,0,\overset{i}{\check{1}},0,...,0) = s_i \in A$ とおき，$s_i : \mathcal{O}_{Y_K} \to \mathcal{O}_{Y_K}$ とみなして $s = \sum_{i=1}^n s_i \cdot p_i$ の形でかく．$\nabla_M = d + B$ $(B = (b_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(\Omega^1_{Y_K}(\log D_K)))$ と表したときに，$m = (m_i)_i \in \mathcal{O}^n_{Y_K}$ の像は,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathrm{Hom}(M, \mathcal{O}_{Y_K})}(s)(m) &= d(s(m)) - (s \otimes \mathrm{id}) \circ \nabla_M(m) \\ &= d\left(\sum_i s_i m_i\right) - \sum_i s_i \left(dm_i + \sum_j b_{ij} m_j\right) \\ &= \sum_i \left(ds_i - \sum_j s_j b_{ji}\right) m_i \end{aligned}$$

である．よって,

$$\nabla_{\mathrm{Hom}(M, \mathcal{O}_{Y_K})}(s) = \left(ds_i - \sum_j s_j b_{ji}\right)_i$$

である．$A \to \mathcal{O}(Y_K^{\mathrm{rig}}) \to j^\dagger\mathcal{O}(Y_K^{\mathrm{rig}})$ による a の像を $a^\ddagger$ と表すことにする $(\Omega^1_A \to \Omega^1(Y_K^{\mathrm{rig}}) \to j^\dagger\Omega^1(Y_K^{\mathrm{rig}})$ についても同様とする)．$\bullet^\dagger$ は加法的関手であり，$\nabla_{M^\dagger} = d + B^\dagger$ と表したときに $B^\dagger = (b^\ddagger_{ij})$ であるから,

$$(\nabla(s))^\dagger = \left(ds_i^\ddagger - \sum_j s_j^\ddagger b_{ji}^\ddagger\right)_i = \nabla(s^\dagger)$$

である． □

命題 3.73. $\nabla : A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{O}_{Y_K}) \to A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \Omega^1_{Y_K}(\log D_K))$ の核は K である．

証明. $\nabla(f) = 0$ であるとする．すると，$\nabla(f^\dagger) = \nabla(f)^\dagger = 0$ であるから，系 3.39 より，$f^\dagger \in K$ である．$\bullet^\dagger$ の単射性より，$f \in K$ である． □

定理 3.74.

$$A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{O}_{Y_K}) \to A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \Omega^1_{Y_K}(\log D_K)) \to A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \Omega^2_{Y_K}(\log D_K))$$

は完全である．

証明. 複体であることは，接続の可積分性から従う．

逆に，$[E, \omega, y] \in A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \Omega^1_{Y_K}(\log D_K))$ に対して，$\nabla[E, \omega, y] = 0$ であると仮定する．ここで，$\omega \in \mathrm{Hom}(M, \Omega^1_{Y_K}(\log D_K))$ である．$\mathcal{O}_{Y_K}$ 加群として $M = E \oplus \mathcal{O}$ とし，$\nabla_M(e, f) = (\nabla_E(e), df - \omega(e))$ とする．$\pi_1 : M \to E, \pi_2 : M \to \mathcal{O}$ を射影とする．π_1 は horizontal （即ち，∇ と可換）であることに注意しよう．$\mathsf{Conn}(Y_K)$ における完全列

$$0 \to \mathcal{O} \to M \to E \to 0$$

を考えれば，M が unipotent 接続であることがわかる．

$N = M^{\mathrm{int}}$ とする．これは，補題 3.6 と同様に代数的にも構成したものである．$\bullet^\dagger$ の完全性から，$N^\dagger = M^{\dagger\,\mathrm{int}}$ であることに注意する．$x_0 \in X_0(\kappa)$ をとる．仮定より $[E, \nabla\omega, y] = 0$ であるから，θ^{alg} の像を考えて，$\nabla(\omega^\dagger(y_{x_0})) = 0$ である．$]x_0[$ 上で de Rham 複体は完全であるから，ある $g \in \mathcal{O}^\dagger(\,]x_0[\,)$ が存在して，$dg = \omega^\dagger(y_{x_0})$ となる．

そこで，$m_{x_0} := (y_{x_0}, g) \in M^\dagger(\,]x_0[\,)$ とすると，

$$\nabla_{M^\dagger}(m_{x_0}) = (\nabla_{E^\dagger}(y_{x_0}), dg - \omega^\dagger(y_{x_0})) = 0$$

ゆえ，$m_{x_0} \in N^\dagger(\,]x_0[\,)$ である．m_{x_0} を Frobenius で解析接続して，$m = (m_x)_{x \in X_0}$ を得る．

このとき，$\nabla[N, \pi_2, m] = [E, \omega, y]$ であることが補題 3.6 の証明と同様に示される． □

$A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \Omega^1_{Y_K}(\log D_K))^d$ を，$A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \Omega^1_{Y_K}(\log D_K))$ の horizontal な元全体の集合とする．以上の議論から，次の定理が証明された．

定理 3.75. 代数的起源の Coleman 関数の積分が

$$\int : A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \Omega^1_{Y_K}(\log D_K))^d \to A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{O}_{Y_K})/K$$

が以下の図式が可換となるように定義される：

$$\begin{array}{ccc}
A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \Omega^1_{Y_K}(\log D_K))^d & \xrightarrow{\int} & A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{O}_{Y_K})/K \\
{\scriptstyle\dagger}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\dagger} \\
A_{\mathrm{Col}}(T, j^\dagger\Omega^1_{]Y_0[})^d & \xrightarrow{\int} & A_{\mathrm{Col}}(T, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[})/K
\end{array}$$

定義 3.76. 写像 $\mathrm{Res}_{D,J}$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{D,J}: A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(Y_K, D_K, \mathcal{F}) \to A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(N^{00}_{J,K}, \emptyset, \mathrm{Res}_{D,J}\mathcal{F})(=: A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(N^{00}_{J,K}, \mathrm{Res}_{D,J}\mathcal{F}))\\ [M, s, y] \mapsto [\mathrm{Res}_{D,J} M, \mathrm{Gr}_J s, \mathrm{Res}_{D,J} y]\end{aligned}$$

と定義する．ただし，$\mathrm{Res}_{D,J}\, y = (y_x)_{x \in N^{00}_{J,\kappa}}$ は y を定理 3.64 に従って解析接続した元である．

命題 3.77. $f = [M, s, y]$ を Y_K 上 D_K に対数的特異点をもつ $\mathcal{O}_{Y_K}$ 値の代数的起源の Coleman 関数とし，$D = \sum D_j$ とかけているとする．$f^{(D_j)} = \mathrm{Res}_{D,j} f$ とする．$\omega_i \in \Omega^1_{Y_K}(\log D_K)$, g_i を同じく代数的起源の Coleman 関数としたときに，

$$df = \sum_i \omega_i g_i$$

と表されているならば，

$$df^{(D_j)} = \sum_i (\mathrm{Res}_{D,j}\, \omega_i) \cdot g_i^{(D_j)}$$

である．ここで，D_j が局所的にパラメータ t_j で定義されているとして，$\omega' \in \Omega^1_{Y_K}(\log D \setminus D_j)$, $a_j \in \mathcal{O}_{Y_K}$ に対して，$\omega = \omega' + a_j \dfrac{dt_j}{t_j}$ とかけているときに，

$$\mathrm{Res}_{D,j}\, \omega := \omega'|_{t_j=0} + a_j|_{t_j=0} \cdot \frac{dt_j}{t_j}$$

である．

証明. $g_i = [(M_i, \nabla_i), s_i, k_i]$ とおく．$\omega_i = [(\mathcal{O}_{Y_K}, d), \omega_i, 1]$ とみなせる．このとき，定理 3.74 の証明と同様の議論によって

$$f = \left[N^{\mathrm{int}}, p, (\underline{k_i}, l)\right]$$

である．ただし，$\bullet^{\mathrm{int}}$ は定義 3.8 によるもので，

$$N = (N, \nabla) = \left(\left(\bigoplus_i M_i\right) \oplus \mathcal{O}_{Y_K}, \nabla\right)$$

$$\nabla(\underline{m_i}, c) = \left(\underline{\nabla_i(m_i)}, dc - \sum_i \omega_i s_i(m_i)\right),$$

$$p: \left(\bigoplus_i M_i\right) \oplus \mathcal{O}_{Y_K} \to \mathcal{O}_{Y_K} \text{ を射影},$$

$$l \text{ は } dl = \sum_i s_i^{\dagger}(k_i)\omega_i^{\dagger} \text{ を満たすもの}$$

としている．ここで，$f_0 = \left[(N, \nabla), p, (\underline{k_i}, l)\right]$ とすると，

$$f_0^{(D_j)} = \left[(\mathrm{Res}_{D,j} N, \mathrm{Res}_{D,j} \nabla), \mathrm{Gr}(p), (\underline{k_i}, l)\right]$$

である．ここで，

$$\operatorname{Res}_{D,j} N = \left(\bigoplus_i \operatorname{Res}_{D,j} M_i\right) \oplus \operatorname{Res}_{D,j} \mathcal{O}_{Y_K},$$

$$(\operatorname{Res}_{D,j} \nabla)(\underline{m_i}, c) = \left(\underline{(\operatorname{Res}_{D,j} \nabla_i)(m_i)}, dc - \sum_i \operatorname{Res}_{D,j} \omega_i \cdot \operatorname{Gr}(s_i)(m_i)\right)$$

と計算される．従って，

$$\begin{aligned} d(\operatorname{Gr}(p))(\underline{m_i}, c) &= d\left(\operatorname{Gr}(p)(\underline{m_i}, c)\right) - (\operatorname{Gr}(p) \otimes \mathrm{id})((\operatorname{Res}_{D,j} \nabla)(\underline{m_i}, c)) \\ &= dc - \left(dc - \sum_i \operatorname{Res}_{D,j} \omega_i \cdot \operatorname{Gr}(s_i)(m_i)\right) \\ &= \sum_i \operatorname{Res}_{D,j} \omega_i \cdot \operatorname{Gr}(s_i)(m_i) \end{aligned}$$

となるから，$df_0^{(D_j)} = \sum_i (\operatorname{Res}_{D,j} \omega_i) \cdot g_i^{(D_j)}$ である．関手 $\operatorname{Res}_{D,j}$ は可積分性に依存しないので，包含写像 $N^{\mathrm{int}} \to N$ によって射 $\operatorname{Res}_{D,j}(N^{\mathrm{int}}) \to \operatorname{Res}_{D,j} N$ が得られる．これは $f^{(D_j)} = f_0^{(D_j)}$ を引き起こし，主張が示された． □

4 p 進多重ゼータ値

4.1 複素多重ゼータ値

4.1.1 複素多重ゼータ値の定義

まずは，複素多重ゼータ値に関する事実を述べる．これらは 4.2 節以降で p 進多重ゼータ値に対して類似を考えることになる．以後この論文全体を通して，$k \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathbb{Z}_{>0}^k$ とする．

定義 4.1. **（複素）多重ゼータ値（MZV）**とは，

$$\zeta(\mathbf{a}) = \sum_{\substack{m_1 < m_2 < \cdots < m_k, \\ m_i \in \mathbb{Z}_{>0}}} \frac{1}{m_1^{a_1} m_2^{a_2} \cdots m_k^{a_k}}$$

の形で与えられる複素数のことをいう．

定義 4.2. $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{>0}^k$ が **admissible** であるとは， $a_k > 1$ を満たすことをいう．

定理 4.3. 多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{a})$ の値が収束する必要十分条件は，$\mathbf{a}$ が admissible であることである．

定義 4.4. admissible な $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{>0}^k$ に対して，**多重ポリログ関数** $\operatorname{Li}_{\mathbf{a}} : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ を

$$\operatorname{Li}_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{\substack{m_1 < m_2 < \cdots < m_k, \\ m_i \in \mathbb{Z}_{>0}}} \frac{z^{m_k}}{m_1^{a_1} m_2^{a_2} \cdots m_k^{a_k}}$$

で定義する．

定理 4.5. admissible な指数 $\mathbf{a}$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{a}) = \lim_{z\to 1} \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$$

である.

4.1.2 調和積とシャッフル積

定義 4.6. $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}^0_{>0}] := \mathbb{Q}[\emptyset]$, 正整数 k に対して $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}^k_{>0}]$ を, 和を形式和として $\mathbb{Z}^k_{>0}$ の元で生成される有理数係数ベクトル空間と定義する. また, $\mathcal{R} = \oplus_{k\geq 0}\mathbb{Q}[\mathbb{Z}^k_{>0}]$ とする. **調和積** $*: \mathcal{R}\times\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ とは, $\mathbb{Q}$ 双線型写像であって, 以下のように帰納的に定義されるものである:

- 任意の $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^k_{>0}$ に対して, $\emptyset * \mathbf{a} = \mathbf{a} * \emptyset = \mathbf{a}$ である.
- 任意の $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^k_{>0}, \mathbf{b}\in\mathbb{Z}^l_{>0}$ に対して, $\mathbf{a}*\mathbf{b} = (\mathbf{a}_- * \mathbf{b}, a_k) + (\mathbf{a}*\mathbf{b}_-, b_l) + (\mathbf{a}_- * \mathbf{b}_-, a_k + b_l)$ である. 但し, $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_k), \mathbf{b} = (b_1, ..., b_l)$ に対して, $\mathbf{a}_- = (a_1, ..., a_{k-1}), \mathbf{b}_- = (b_1, ..., b_{l-1})$ とする.

$\mathcal{R}^0$ を admissible な指数で生成される $\mathcal{R}$ の部分空間とする. $\mathbf{a}\mapsto\zeta(\mathbf{a})$ を $\mathcal{R}^0$ に $\mathbb{Q}$ 線型に拡張する.

定理 4.7 (MZV に対する調和積等式)**.** admissible な $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{a})\zeta(\mathbf{b}) = \zeta(\mathbf{a}*\mathbf{b})$$

が成立する.

定義 4.8. 自然数 k, l に対して,

$$\mathrm{Sh}^{\leq}(k,l) := \bigcup_N \left\{\sigma : \{1,...,k+l\}\to\{1,...,N\} \,\middle|_{\substack{\sigma\text{は全射で,}\\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(k),\sigma(k+1)<\cdots<\sigma(k+l)}}\right\}$$

とおく. さらに, $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^k_{>0}, \mathbf{b}\in\mathbb{Z}^l_{>0}$ および $\sigma\in\mathrm{Sh}^{\leq}(k,l)$ に対して,

$$\widetilde{\sigma}(\mathbf{a},\mathbf{b}) := (c_1, ...c_N)$$

を $N = |\mathrm{Im}\,\sigma|$ かつ

$$c_i = \begin{cases} a_s + b_{t-k} & \text{if } \sigma^{-1}(i) = \{s,t\} \text{ with } s<t \\ a_s & \text{if } \sigma^{-1}(i) = \{s\} \text{ with } s\leq k \\ b_{s-k} & \text{if } \sigma^{-1}(i) = \{s\} \text{ with } s>k \end{cases}$$

で定める.

命題 4.9. $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^k_{>0}, \mathbf{b}\in\mathbb{Z}^l_{>0}$ とする.

$$\mathbf{a}*\mathbf{b} = \sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}^{\leq}(k,l)} \widetilde{\sigma}(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

である．したがって，

$$\zeta(\mathbf{a}*\mathbf{b})=\sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}^{\leq}(k,l)}\zeta(\widetilde{\sigma}(\mathbf{a},\mathbf{b}))$$

である．

証明. 定義から明らか. $\square$

定義 4.10. $\mathcal{P}:=\mathbb{Q}\langle A,B\rangle$ を $\mathbb{Q}$ 上 2 変数非可換多項式環とする．**シャッフル積** $\text{ш}:\mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ とは，$\mathbb{Q}$ 双線形写像であって，以下のように帰納的に定義されるものである：

- 任意の $W\in\mathcal{P}$ に対して，$W\,\text{ш}\,\emptyset=\emptyset\,\text{ш}\,W=W$.
- 任意の $W,W'\in\mathcal{P}$，任意の $U,V\in\{A,B\}$ に対して，$(UW)\,\text{ш}\,(VW')=U(W\,\text{ш}\,(VW'))+V((UW)\,\text{ш}\,W')$.

$\mathbf{a}=(a_1,...,a_k)\in\mathbb{Z}^k_{>0}$ に対して，$A^{a_k-1}B\cdots A^{a_1-1}B\in\mathcal{P}$ を対応させることで，$\mathcal{R}$ にシャッフル積 ш を考えることができる．

定理 4.11 (MZV に対するシャッフル積等式)**.** admissible な $\mathbf{a},\mathbf{b}$ に対して，

$$\zeta(\mathbf{a})\zeta(\mathbf{b})=\zeta(\mathbf{a}\,\text{ш}\,\mathbf{b})$$

が成立する．

定理 4.12 (MZV に対する複シャッフル関係式)**.** admissible な $\mathbf{a},\mathbf{b}$ に対して，

$$\zeta(\mathbf{a}*\mathbf{b})=\zeta(\mathbf{a}\,\text{ш}\,\mathbf{b})$$

が成立する．

4.2 p 進多重ゼータ値の定義

4.2.1 p 進多重ゼータ値の定義

3.1 節における記号を用いて $Y=\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}},X=\operatorname{Spec}\mathcal{V}\left[t,\frac{1}{t},\frac{1}{t-1}\right],Y_0=\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p},X_0=\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}\setminus\{0,1,\infty\}=\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{F}}_p\left[t,\frac{1}{t},\frac{1}{t-1}\right]$ とする．また，3.1 節の通りに U をとり，単に $A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}:=A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U),\Omega^{\varpi}_{\mathrm{Col}}:=\Omega^{\varpi}_{\mathrm{Col}}(U)$ とかく．

定義 4.13. $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_k)\in\mathbb{Z}^k_{>0}$ に対して，***p* 進多重ポリログ（*p*MPL）** $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}:]0[\to\mathbb{C}_p$ を，

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)=\sum_{\substack{m_1<m_2<\cdots<m_k,\\ m_i\in\mathbb{Z}_{>0}}}\frac{z^{m_k}}{m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots m_k^{a_k}}\tag{4.1}$$

で定義する．

命題 4.14. $]0[$ で $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ は収束する．$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(1)$ は発散する．

証明. p 進における無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ が収束することと，p 進の意味で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ であることが同値なことに注意しよう．$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ の z^N の係数を $t_N^{(k)} := \displaystyle\sum_{\substack{m_1<m_2<\cdots<N,\\ m_i\in\mathbb{Z}_{>0}}} \frac{1}{m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots N^{a_k}}$ とする．

$$\begin{aligned}\min_{m_1<m_2<\cdots<N} \mathrm{ord}_p \frac{1}{m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots N^{a_k}} &= -\max_{m_1<m_2<\cdots<N} \mathrm{ord}_p(m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots N^{a_k}) \\ &\geq -(a_1+\cdots+a_k)\log_p N\end{aligned}$$

であるから，超距離不等式より

$$|t_N^{(k)}|_p \leq p^{(a_1+\cdots+a_k)\log_p N} = N^{(a_1+\cdots+a_k)}$$

である．$|z|_p < 1$ であるならば,

$$|t_N^{(k)} z^N|_p \leq N^{(a_1+\cdots+a_k)}|z|_p^N \to 0 \quad (N\to\infty)$$

であるから，p 進における無限級数の収束条件から，$|z|_p<1$ において $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ は収束する．

次に，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(1)$ が発散することを k に関する帰納法で示す．$k=1$ のときは，$|t_N^{(1)}|_p = |N^{a_1}|_p^{-1} \geq 1$ より，$\displaystyle\sum_{N=1}^{\infty} t_N^{(1)}$ は発散する．

次に $k>1$ のときは,

$$|t_N^{(k)}|_p = |N^{a_k}|_p^{-1}\cdot\left|\sum_{i=1}^{N-1} t_i^{(k-1)}\right|_p \geq \left|\sum_{i=1}^{N-1} t_i^{(k-1)}\right|_p$$

であり，帰納法の仮定から $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} t_i^{(k-1)}$ は $N\to\infty$ のとき発散するので，$t_N^{(k)}$ は 0 に収束しない．したがって，主張が示された． □

補題 4.15. $z\in]0[$ とすると,

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\mathrm{Li}_{a_1,\ldots,a_k-1}(z) & (a_k\geq 2) \\ \dfrac{1}{1-z}\mathrm{Li}_{a_1,\ldots,a_{k-1}}(z) & (a_k=1)\end{cases}$$

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_1(z) = \frac{1}{1-z}$$

証明. 明らか. □

定義 4.16. $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_m)\in\mathbb{Z}_{>0}^m$ に対して，Coleman 関数としての ***p* 進多重ポリログ (*p*MPL)** $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}^{\varpi}(z)\in A_{\mathrm{Col}}^{\varpi}$ を，反復積分

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}^{\varpi}(z) := \begin{cases}\displaystyle\int_0^z \frac{dt}{t}\mathrm{Li}_{a_1,\ldots,a_k-1}(t) & (a_k\geq 2)\\ \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{1-t}\mathrm{Li}_{a_1,\ldots,a_{k-1}}(t) & (a_k=1)\end{cases}$$

$$\mathrm{Li}_1^{\varpi}(z) := \int_0^z \frac{dt}{1-t}$$

によって定義することができる．ここで，$\int_\alpha^\beta f(t)dt$ は，$f(t)$ の Coleman 関数としての原始関数 $F(t)$ に対して，$F(\beta)-F(\alpha)$ を表す．F の取り方は定数分の不定性を除いて定まるので，$F(\beta)-F(\alpha)$ は一意に定まる．

命題 4.17. $\mathrm{Li}^{\varpi}_{\mathbf{k}}(z)|_{]0[} \in A(]0[)$，$\mathrm{Li}^{\varpi}_{\mathbf{k}}(z)|_{]1[} \in A(]1[)[\log^{\varpi}(z-1)]$，
$\mathrm{Li}^{\varpi}_{\mathbf{k}}(z)|_{]\infty[} \in A(]\infty[)\left[\log^{\varpi}\left(\dfrac{1}{z}\right)\right]$ である．

証明. $]0[$ においては，(4.1) と同じ冪級数展開をもつことから従う．

$]1[$ においては, $\mathrm{Li}^{\varpi}_1(z)=-\log^{\varpi}(z-1)$ であり, $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{1-(1-t)}=1+(1-t)+(1-t)^2+\cdots$ などを用いて繰り返し積分することで帰納的に従う．

$]\infty[$ でも同様に，$\dfrac{1}{1-t}=-\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}-\cdots$ を用いて繰り返し積分することで帰納的に従う． □

定義 4.18. $\alpha\in\mathbb{C}_p$ とし，$f(z)$ を $\mathbb{C}_p$ 上で定義された関数とする．$\mathbb{Q}_p(z_1,z_2,\ldots)/\mathbb{Q}_p$ の不分岐次数が有限であるような α に収束する任意の数列 $\{z_n\}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ が同じ値に収束するとき，その値を $\widetilde{\lim_{z\to\alpha}} f(z)$ とかき，$\widetilde{\lim_{z\to\alpha}} f(z)$ は収束するという．そうでないとき，$\widetilde{\lim_{z\to\alpha}} f(z)$ は発散するという．

補題 4.19. $k\geq 0$ に対して，$\widetilde{\lim_{z\to 0}} z(\log^{\varpi} z)^k=0$ である．

証明. $k=0$ のとき明らか．

L を $\mathbb{Q}_p$ 上不分岐次数 e が有限であるような体とする．uniformizer を π とする．$\varepsilon_n\in L$ で $\varepsilon_n\to 0$ であるとする．$\varepsilon_n=u_n\cdot\pi^{r_n}$ $(u_n\in\mathcal{O}_L^{\times}, r_n\in\mathbb{Z})$ と表す．$p^c>e$ となる $c\in\mathbb{Z}_{>0}$ をとる．$s_n\in\mathbb{Z}_{>0}$ を p と互いに素で $u_n^{s_n}\equiv 1 \pmod{\pi\mathcal{O}_L}$ であるようなものとする．$\alpha_n=u_n^{s_n}-1\in\pi\mathcal{O}_L$ とおく．このとき，

$$(u_n^{s_n})^{p^c}=(1+\alpha_n)^{p^c}\equiv 1+\alpha_n^{p^c}\equiv 1 \pmod{p\mathcal{O}_L}$$

である．したがって，

$$\log^{\varpi} u_n=\frac{1}{s_np^c}\log^{\varpi}(u_n^{s_n})^{p^c}\in\frac{1}{p^c}\mathcal{O}_L$$

であるから，$\left((\log^{\varpi} u_n+r_n\log^{\varpi}\pi)^k\right)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ は有界なので

$$\varepsilon_n(\log^{\varpi}\varepsilon_n)^k=\varepsilon_n(\log^{\varpi} u_n+r_n\log^{\varpi}\pi)^k\xrightarrow{n\to\infty}0$$

□

補題 4.20. $l\geq 0$ に対して，$g(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{l} a_k\left(\log^{\varpi} z\right)^k$ $(a_k\in\mathbb{C}_p)$ とする．このとき，

$$\widetilde{\lim_{z\to 0}} g(z) \text{ が収束} \iff k\geq 1 \text{ に対して，} a_k=0$$

証明. $\Longleftarrow$ は明らか．$\Longrightarrow$ を示す．$|\alpha|_p<1$ で $\log^{\varpi}\alpha\neq 0$ なる α をとり，$z_n=\alpha^n$ とすると，$g(z_n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{l}a_kn^k\left(\log^{\varpi}\alpha\right)^k=\sum_{k=0}^{l}b_kn^k$ となる．ただし，定数 b_k を $b_k=a_k\left(\log^{\varpi}\alpha\right)^k$ とおい

た．$\{g(z_n)\}$ が収束することから，階差

$$\Delta g(z_n) := g(z_{n+1}) - g(z_n) = \sum_{k=1}^{l} b_k((n+1)^k - n^k)$$

は 0 に収束する．繰り返し階差を取って $\Delta^l g(z_n) = l!b_l$ が 0 に収束する．すなわち，$b_l = 0$ で，$a_l = 0$ である．これは，$a_1 = \cdots = a_l = 0$ を意味する．

□

命題 4.21. $\mathbf{a}$ を fix する．$\widetilde{\lim_{z\to 1}} \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}^{\varpi}(z)$ の収束・発散は，ϖ に依らない．さらに，収束する場合には，その値も ϖ に依らない．

証明.

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}^{\varpi}(z) = f_0(z-1)+f_1(z-1)\log^{\varpi}(z-1)+\cdots+f_m(z-1)(\log^{\varpi}(z-1))^m \ (f_i \in A(\,]0[\,)) \tag{4.2}$$

と展開する．$f_0, ..., f_m$ は命題 3.5 より ϖ に依らない．補題 4.19 より

$$\widetilde{\lim_{z\to 1}} \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}^{\varpi}(z) = \widetilde{\lim_{z\to 1}} \left(f_0(0) + f_1(0)\log^{\varpi}(z-1) + \cdots + f_m(0)(\log^{\varpi}(z-1))^m\right)$$

である．したがって，補題 4.20 より，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}^{\varpi}(z)$ が収束することと，$i \geq 1$ に対して $f_i(0) = 0$ であることは同値である．この条件は ϖ に依らない．またこのとき，

$$\widetilde{\lim_{z\to 1}} \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}^{\varpi}(z) = f_0(0) \tag{4.3}$$

であるが，この値も ϖ に依らない． □

定義 4.22. $\widetilde{\lim_{z\to 1}} \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}^{\varpi}(z)$ が収束するような $\mathbf{a}$ に対して，その値のことを $\boldsymbol{p}$ **進多重ゼータ値（$\boldsymbol{p}$MZV）** $\zeta_p(\mathbf{a})$ と定義する．命題 4.21 より，この定義は ϖ に依らない．定理 4.37 で，$\mathbf{a}$ が admissible であるときに，$\zeta_p(\mathbf{a})$ が定まることを示す．

定理 4.23. 全ての pMZV は $\mathbb{Q}_p$ の元である．

証明. $\dfrac{1}{t}, \dfrac{1}{1-t}$ はともに $\mathbb{Q}_p$ 上定義された微分形式であり，Coleman 積分が $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の作用と compatible であること（[BdJ03, Remark 2.3.]）から，分枝として $\varpi \in \mathbb{Q}_p$ の場合を考えれば，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}^{\varpi}(z)$ は Galois 不変である．よって，$\zeta_p(\mathbf{a}) \in \mathbb{Q}_p$ である． □

4.2.2 p 進 KZ 方程式

環 R に対して $R\langle\langle A, B\rangle\rangle$ を，A, B を変数とする R 上非可換形式的冪級数環とする．以後 ϖ を固定する．

定義 4.24. **（形式的）$\boldsymbol{p}$ 進 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式（$\boldsymbol{p}$KZeq）**を，

$$\frac{dG}{du}(u) = \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}\right) G(u) \tag{pKZeq}$$

とする．但し，$G(u) \in A_{\mathrm{Col}}^{\varpi}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ とする．

定義 4.25. $u^A := 1+\dfrac{\log^{\varpi} u}{1!}A+\dfrac{(\log^{\varpi} u)^2}{2!}A^2+\cdots \in A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A,B\rangle\rangle$（すなわち, $\exp(A\log^{\varpi} u)$ を形式的に展開したもの）とする．これと同様に u^{-A} なども定義する．また，$G_0^{\varpi}(u) \approx u^A$ $(u\to 0)$ であるとは，$G_0^{\varpi}(u)\cdot u^{-A}|_{A(\,]0[\,)\langle\langle A,B\rangle\rangle} \in 1+A(\,]0[\,)\langle\langle A,B\rangle\rangle\cdot A + A(\,]0[\,)\langle\langle A,B\rangle\rangle\cdot B$ かつ $G_0^{\varpi}(0)=1\in\mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle$ であることとして定義する．他も同様に定義する．

補題 4.26. $G(u), H(u) \in A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A,B\rangle\rangle$ を (pKZeq) の解とし，$H(u)$ は可逆であるとする．このとき，$H(u)^{-1}G(u)\in\mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle$ である．

証明. $H\cdot H^{-1}=1$ を両辺微分して $H'\cdot H^{-1}+H\cdot(H^{-1})'=0$ 即ち $(H^{-1})'=-H^{-1}H'H^{-1}$ となることに注意する．従って，

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(H^{-1}G) &= -H^{-1}\frac{dH}{du}H^{-1}G + H^{-1}\frac{dG}{du}\\ &= -H^{-1}\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}\right)HH^{-1}G + H^{-1}\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}\right)G\\ &= 0\end{aligned}$$

□

定理 4.27. (pKZeq) の解 $G_0^{\varpi}\in A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A,B\rangle\rangle$ であって，$G_0^{\varpi}\approx u^A$ $(u\to 0)$ であるものがただ 1 つ存在する．

証明. まずは，ただ 1 つであることを示す．H_0^{ϖ} が同じ条件を満たすもう 1 つの解であるとする．この解の定数項は 1 であるから，$G_0^{\varpi}, H_0^{\varpi}$ は可逆である．すると，補題 4.26 より，

$$G_0^{\varpi} = H_0^{\varpi}\cdot c \quad (c\in\mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle)$$

$u\to 0$ を考えれば，$c=1$ である．

次に存在を示す．$G_0^{\varpi}(u)=P(u)u^A$ $(P(u)\in A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A,B\rangle\rangle)$ と表すと，

$$\begin{aligned}G_0^{\varpi}(u)\text{ が }(p\mathrm{KZeq})\text{ の解} &\iff \frac{dP}{du}u^A + P\frac{A}{u}u^A = \left(\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}\right)Pu^A\\ &\iff \frac{dP}{du}u^A = \frac{1}{u}(AP-PA)u^A + \frac{1}{u-1}BPu^A\\ &\iff \frac{dP}{du} = \frac{1}{u}(AP-PA) + \frac{1}{u-1}BP\end{aligned}$$

$P(u) = 1 + \sum_{W:\mathrm{words}} P_W(u)W$ と表すと，

$$\frac{dP_W}{du} = \begin{cases} \dfrac{1}{u}P_{W'A} - \dfrac{1}{u}P_{AW'} & (W = AW'A) \\ \dfrac{1}{u}P_{W'B} & (W = AW'B) \\ -\dfrac{1}{u}P_{BW'} + \dfrac{1}{u-1}P_{W'A} & (W = BW'A) \\ \dfrac{1}{u-1}P_{W'B} & (W = BW'B) \\ 0 & (W = A) \\ \dfrac{1}{u-1} & (W = B) \end{cases}$$

但し，W' は空でもよい word である．$\dfrac{1}{u}, \dfrac{1}{u-1}$ は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 上の有理関数であるから，これによって反復積分することによって，$P_W(0) = 0$ なる $P_W(u) \in A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}$ を得る．従って，$G^{\varpi}_0(u) = P(u)u^A$ によって解を得る． □

命題 4.28. $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0,1,\infty\}, g_0 \in \mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle$ とする．この時，$H^{\varpi}(z_0) = g_0$ を満たす (pKZeq) のただひとつの解 $H^{\varpi}(u) \in A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ が存在する．

証明. $H^{\varpi}(u) = G^{\varpi}_0(u) \cdot G^{\varpi}_0(z_0)^{-1}g_0$ とせよ．$H^{\varpi}(u)$ は (pKZeq) の解になっていて，唯一性は補題 4.26 より従う． □

命題 4.29. (pKZeq) の解 $G^{\varpi}_1 \in A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ であって，$G^{\varpi}_1(u) \approx (1-u)^B$ $(u \to 1)$ であるものがただ 1 つ存在する．

証明. 定理 4.27 と同様. □

$g(u) \in A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ に対して，$g(B, A)(u)$ を，

$$A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A, B\rangle\rangle \to A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A, B\rangle\rangle; \quad A \mapsto B, \quad B \mapsto A$$

による g の像を表すこととする．また，$g(1-u)$ を，

$$\tau : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0,1,\infty\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0,1,\infty\} \quad t \mapsto 1-t$$

から誘導される $\tau^* : A^{\varpi}_{\mathrm{loc}} \to A^{\varpi}_{\mathrm{loc}}$ による $g(u)$ の像とする．

命題 4.30. $G^{\varpi}_1(u) = G^{\varpi}_0(B, A)(1-u)$ である．

証明. 注意 4.42, 定義 3.32 より，$\tau^*(A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}) \subset A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}$ であるから，$\tau^*(G^{\varpi}_0(B, A)) \in A^{\varpi}_{\mathrm{Col}}\langle\langle A, B\rangle\rangle$

である．そして，

$$\begin{aligned}\frac{d\tau^*(G_0^{\varpi}(B,A))}{du} &= -\tau^*\frac{d(G_0^{\varpi}(B,A))}{du}\\ &= -\tau^*\left\{\left(\frac{B}{u}+\frac{A}{u-1}\right)G_0^{\varpi}(B,A)\right\}\\ &= \left(\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}\right)\tau^*G_0^{\varpi}(B,A)\end{aligned}$$

であるから，$\tau^*(G_0^{\varpi}(B,A))$ は (pKZeq) を満たす．また，$G_1^{\varpi}(1)=G_0^{\varpi}(B,A)(1-1)=1$ であるから，命題 4.29 の唯一性から従う． □

$G_0^{\varpi}(u), G_1^{\varpi}(u)$ は共に可逆である．補題 4.26 より，

$$\Phi_{\mathrm{KZ}}^{p,\varpi} := (G_1^{\varpi}(u))^{-1}G_0^{\varpi}(u) \in \mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle$$

である．

定理 4.31. $\Phi_{\mathrm{KZ}}^{p,\varpi}$ は，ϖ に依らない．

証明. $z_0 \in\,]X_0[$ をとる．Coleman 関数の $]X_0[$ での値は ϖ に依らないので，$\Phi_{\mathrm{KZ}}^{p,\varpi} = (G_1^{\varpi}(z_0))^{-1}G_0^{\varpi}(z_0)$ は ϖ に依らない． □

定義 4.32. $\Phi_{\mathrm{KZ}}^{p} := (G_1^{\varpi}(u))^{-1}G_0^{\varpi}(u) \in \mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle$ を，***p* 進 Drinfel'd associator** という．

定義 4.33. (1) $\mathbf{P} = \bigoplus_{m\geq 0}\mathbf{P}_m = \mathbb{Q}\langle A,B\rangle$ を $\mathbb{Q}$ 上 2 変数非可換多項式環とする．但し，$\deg\,A = \deg B = 1$ として，$\mathbf{P}_m$ は次数 m の斉次式全体とする．word W に対して，$\mathrm{wt}(W)$ をその次数，$\mathrm{dp}(W)$ を B に関する次数とする．

(2) $M_B = \mathbf{P}\cdot B$ を末尾が B の word 全体とする（以後同様の記号を用いる）．canonical な写像

$$\mathbf{P}\to\mathbf{P}/\mathbf{P}\cdot A \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}\cdot 1 + M_B \to \mathbf{P}$$

から誘導される $\mathbb{C}_p$ 線形写像を $f' : \mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle \to \mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle$ とする．

(3) $k\geq 0, q_0\geq 0, p_i\geq 1, q_i\geq 1\ (i\geq 1)$ を整数とする．$W = B^{q_0}A^{p_1}B^{q_1}A^{p_2}B^{q_2}\cdots A^{p_k}B^{q_k}\in M_B$ に対して，

$$\mathrm{Li}_W^{\varpi}(z) := \mathrm{Li}_{\underbrace{1,\ldots,1}_{q_k-1},p_k+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{q_{k-1}-1},p_{k-1}+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{q_0}}(z)$$

とする．

定理 4.34 ([Fur04, Theorem 3.15.])**.** $G_0^{\varpi}(z) = 1 + \sum_{W:\mathrm{words}} J_W^{\varpi}(z)W$ と表すと，

(1) $W\in M_B$ のとき，$J_W^{\varpi}(z) = (-1)^{\mathrm{dp}(W)}\mathrm{Li}_W^{\varpi}(z)$

(2) $W = VA^r\ (r\geq 0, V\in M_B)$ のとき，

$$J_W^{\varpi}(z) = \sum_{s+t=r,s\geq 0,t\geq 0}(-1)^{\mathrm{dp}(W)+s}\mathrm{Li}_{f'(V \,ш\, A^s)}(z)\frac{(\log^{\varpi} z)^t}{t!}$$

(3) $W = A^r$ $(r \geq 0)$ のとき，$J^{\varpi}_W(z) = \dfrac{(\log^{\varpi} z)^r}{r!}$

である．

補題 4.35.

$$\widetilde{\lim_{z\to 0}}\, z^{-A} G^{\varpi}_0(z) = 1$$

証明. $P(u) = G^{\varpi}_0(u)u^{-A}$ は，$A(\,]0[\,)\langle\langle A, B\rangle\rangle$ の元であり，$P(0) = 1$ であるから，$P(u) = 1 + uk(u)$ $(k(u) \in A(\,]0[\,)\langle\langle A, B\rangle\rangle)$ とかける．従って，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lim_{z\to 0}}\, z^{-A} G^{\varpi}_0(z) &= \widetilde{\lim_{z\to 0}}\, z^{-A} P(z) z^{A} \\
&= \widetilde{\lim_{z\to 0}} (1 + z^{-A} z k(z) z^{A})
\end{aligned}$$

z^{-A}, z^{A} を展開し，補題 4.19 を用いると，主張を得る． □

補題 4.36.

$$\widetilde{\lim_{z\to 0}}\, z^{-B} G^{\varpi}_0(1-z) = \Phi^{p}_{KZ}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lim_{z\to 0}}\, z^{-B} G^{\varpi}_0(1-z) &= \widetilde{\lim_{z\to 0}}\, z^{-B} G^{\varpi}_1(1-z)\Phi^{p}_{KZ} \\
&= \widetilde{\lim_{z\to 0}}\, z^{-B} G^{\varpi}_0(B, A)(z)\Phi^{p}_{KZ} \text{ (命題 4.30)} \\
&= \Phi^{p}_{KZ} \text{ (補題 4.35)}
\end{aligned}$$

□

定理 4.37. $k_m > 1$ なる $\mathbf{k}$ に対して，$\widetilde{\lim_{z\to 1}}\, \mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は収束し，$\zeta_p(\mathbf{k})$ は意味をもつ．

証明. 補題 4.36 より，

$$\widetilde{\lim_{z\to 0}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\log^{\varpi} z)^n}{n!} B^n \right) \left(1 + \sum_{W:\text{words}} J^{\varpi}_W(1-z) W \right) = \Phi^{p}_{KZ}$$

であるから，特に $W \in A \cdot \mathbf{P}$ に対して，Φ^{p}_{KZ} の W の係数は，$\widetilde{\lim_{z\to 0}}\, J^{\varpi}_W(1-z)$ に等しい．従って，$W = A^{k_m-1}B \cdots A^{k_1-1}B$ $(k_i \geq 1, k_m > 1)$ に対して，$\widetilde{\lim_{z\to 0}}\, J^{\varpi}_W(1-z)$ は収束する．

定理 4.34(1) より，$J^{\varpi}_W(1-z) = (-1)^{\mathrm{dp}(W)} \mathrm{Li}^{\varpi}_W(1-z)$ であるから，$\widetilde{\lim_{z\to 1}}\, \mathrm{Li}^{\varpi}_W(z) = \widetilde{\lim_{z\to 0}}\, \mathrm{Li}^{\varpi}_W(1-z)$ が収束する． □

定義 4.38. (1) ${}_A M_B = A \cdot \mathbf{P} \cdot B$ とする．自然な写像

$$\mathbf{P} \to \mathbf{P}/(B \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot A) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \cdot 1 + {}_A M_B \to \mathbf{P}$$

から誘導される $\mathbb{C}_p$ 線形写像を $f : \mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle \to \mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle$ とする．

(2) $k \geq 1, p_i \geq 1, q_i \geq 1$ $(i \geq 1)$ を整数とする．$W = A^{p_1}B^{q_1}A^{p_2}B^{q_2}\cdots A^{p_k}B^{q_k} \in {}_AM_B$ に対して，

$$Z_W = \widetilde{\lim_{z\to 0}} \mathrm{Li}_W^{\varpi}(1-z) = \zeta_p(\underbrace{1,...,1}_{q_k-1}, p_k+1, \underbrace{1,...,1}_{q_{k-1}-1}, p_{k-1}+1,...,p_1+1)$$

とする．

定理 4.39 ([Fur04, Theorem 3.30])**.** $\Phi_{\mathrm{KZ}}^p = 1 + \sum_{W:\mathrm{words}} I_W W$ と表すと，

(1) $W \in {}_AM_B$ のとき，$I_W = (-1)^{\mathrm{dp}(W)} Z_W$

(2) $W = B^rVA^s$ $(r, s \geq 0, V \in {}_AM_B)$ のとき，

$$I_W = (-1)^{\mathrm{dp}(W)} \sum_{0\leq a\leq r, 0\leq b\leq s} (-1)^{a+b} Z_{f(B^a \,ш\, B^{r-a}VA^{s-b} \,ш\, A^b)}$$

(3) $W = B^rA^s$ $(r, s \geq 0)$ のとき，

$$I_W = (-1)^{\mathrm{dp}(W)} \sum_{0\leq a\leq r, 0\leq b\leq s} (-1)^{a+b} Z_{f(B^a \,ш\, B^{r-a}A^{s-b} \,ш\, A^b)}$$

である．

4.2.3 シャッフル積公式

命題 4.40. $\Delta : A_{\mathrm{Col}}^{\varpi}\langle\langle A, B\rangle\rangle \to A_{\mathrm{Col}}^{\varpi}\langle\langle A, B\rangle\rangle \widehat{\otimes} A_{\mathrm{Col}}^{\varpi}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ を，

$$A \mapsto A \otimes 1 + 1 \otimes A, \quad B \mapsto B \otimes 1 + 1 \otimes B$$

によって与えられる $A_{\mathrm{Col}}^{\varpi}$ 代数の準同型とする．このとき，

$$\Delta(\Phi_{\mathrm{KZ}}^p) = \Phi_{\mathrm{KZ}}^p \otimes \Phi_{\mathrm{KZ}}^p$$

である．

証明. まず，

$$\Delta(G_0^{\varpi}(A,B)(u)) = G_0^{\varpi}(\Delta(A), \Delta(B))(u) \approx u^{\Delta(A)} \ \ (u \to 0)$$

であり，$\Delta(G_0^{\varpi}(A,B)(u))$ が

$$\frac{dG}{du}(u) = \left(\frac{\Delta(A)}{u} + \frac{\Delta(B)}{u-1}\right) G(u) \tag{4.4}$$

の解であることが直接計算によりわかる．また，

$$\begin{aligned} G_0^{\varpi}(A,B)(u) \otimes G_0^{\varpi}(A,B)(u) &= (G_0^{\varpi}(A,B)(u) \otimes 1) \cdot (1 \otimes G_0^{\varpi}(A,B)(u)) \\ &\approx u^A \otimes u^A \ \ (u \to 0) \end{aligned}$$

であり，$G_0^{\varpi}(A,B)(u)\otimes G_0^{\varpi}(A,B)(u)$ が (4.4) の解であることが直接計算によりわかる．$u^{\Delta(A)}=u^A\otimes u^A$ であるから，解の唯一性より，

$$\Delta(G_0^{\varpi}(A,B)(u))=G_0^{\varpi}(A,B)(u)\otimes G_0^{\varpi}(A,B)(u)$$

である．$G_1^{\varpi}(u)$ についても同様である．したがって，

$$\begin{aligned}\Delta(\Phi_{\mathrm{KZ}}^p)=\Delta((G_1^{\varpi})^{-1}G_0^{\varpi})&=\Delta(G_1^{\varpi})^{-1}\Delta(G_0^{\varpi})=(G_1^{\varpi}\otimes G_1^{\varpi})^{-1}\cdot(G_0^{\varpi}\otimes G_0^{\varpi})\\&=(G_1^{\varpi})^{-1}G_0^{\varpi}\otimes(G_1^{\varpi})^{-1}G_0^{\varpi}=\Phi_{\mathrm{KZ}}^p\otimes\Phi_{\mathrm{KZ}}^p\end{aligned}$$

□

定理 4.41 (pMZV に対するシャッフル積公式)**.** admissible な指標 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ に対して，

$$\zeta_p(\mathbf{a})\zeta_p(\mathbf{b})=\zeta_p(\mathbf{a}\,ш\,\mathbf{b})$$

が成り立つ．

証明. 命題 4.40 で示した式の両辺の係数を比較することで，$I_WI_{W'}=I_{W\,ш\,W'}$ が得られる（但し，$I_{\bullet}^{\varpi}$ を $\mathbf{P}$ 上に線形に拡張している）が，$W\,ш\,W'$ をなす単項式の深さはすべて $\mathrm{dp}(W)+\mathrm{dp}(W')$ であるので，定理 4.39(1) より $\zeta_p(\mathbf{a})\zeta_p(\mathbf{b})=\zeta_p(\mathbf{a}\,ш\,\mathbf{b})$ である． □

注意 4.42. Besser による Coleman 関数の解釈では，pMPL は以下のように翻訳される．

R を環とする．$R\langle\langle A,B\rangle\rangle$ の元のうち，A,B に関して n 次以下の多項式全体を $R\langle A,B\rangle^{(n)}$ とかくこととする（他にも同様の記号を用いる）．$f\in R\langle\langle A,B\rangle\rangle$ に対して，A,B に関して n 次以下の項だけを返す自然な商写像による像を $\overline{f}^{(n)}\in R\langle A,B\rangle^{(n)}$ とかく．

$X=\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}\setminus\{0,1,\infty\},Y=\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$ とし，それに付随する rigid triple $T=T_{(X,Y)}$ を考える．

$\mathbf{a}$ を重さ n 以下の word としたときに，$s_{\mathbf{a}}:R\langle A,B\rangle^{(n)}\to R$ を $f\in R\langle A,B\rangle^{(n)}$ に対して，$\mathbf{a}$ に対応する word の単項式の係数 ($\in R$) を返す写像とする．そして，$j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}\langle A,B\rangle^{(n)}$ に接続

$$\nabla(f)=\overline{\left\{df-\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\right)fdz\right\}}^{(n)}$$

を入れる．定理 4.27 にあるように，$x_0\in X_0(\overline{\mathbb{F}}_p)$ に対して $G_0^{\varpi}|_{]x_0[}\in A_{\mathrm{Col}}^{\varpi}(]x_0[)\langle\langle A,B\rangle\rangle$ として与えたが，これは異なる x_0 に対して $G_0^{\varpi}|_{]x_0[}\in j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}\langle\langle A,B\rangle\rangle$ として互いに解析接続されているものだと解釈される．そこで，Coleman 関数

$$\left[j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}\langle A,B\rangle^{(n)},s_{\mathbf{a}},(\overline{G_0^{\varpi}|_{]x_0[}}^{(n)})_{x_0\in X_0(\overline{\mathbb{F}}_p)}\right]$$

を考えよう．

$$\theta_{x_0}x_0^*\left[j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_0[}\langle A,B\rangle^{(n)},s_{\mathbf{a}},(\overline{G_0^{\varpi}|_{]x_0[}}^{(n)})_{x_0\in X(\overline{\mathbb{F}}_p)}\right]=s_{\mathbf{a}}(\overline{G_0^{\varpi}|_{]x_0[}}^{(n)})=\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)|_{]x_0[}$$

であるから，この Coleman 関数は $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ を表す．

4.3　p 進多重ゼータ値の複シャッフル関係式

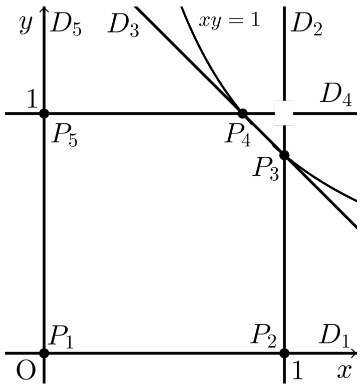
4.3.1　moduli 空間 $\mathcal{M}_{0,5}$

moduli 空間 $\mathcal{M}_{0,5}$ は,

$$\{(x,y)\in\mathbb{A}^2\}\setminus(\{x=0\}\cup\{y=0\}\cup\{x=1\}\cup\{y=1\}\cup\{xy=1\})$$

と同一視される．$\mathcal{M}_{0,5}$ の Deligne-Mumford compactification $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ は，$(\mathbb{P}^1)^2(\supset\mathcal{M}_{0,5})$ の $(x,y)=(1,1),(0,\infty),(\infty,0)$ での blow-up で，$\overline{\mathcal{M}_{0,5}}\setminus\mathcal{M}_{0,5}$ は $\{x=0\},\{y=0\},\{x=1\},\{y=1\},\{xy=1\},\{x=\infty\},\{y=\infty\}$ 及び blow up でできた $(x,y)=(1,1),(0,\infty),(\infty,0)$ における divisor からなる．

$\{y=0\},\{x=1\},(1,1)$ における divisor, $\{y=1\},\{x=0\}$ を順に $D_1,D_2,D_3,D_4,D_5=D_0$ とし，$i=1,2,3,4,5$ に対して $D_i\cap D_{i-1}=P_i$ とする．



$$c:(x,y)\mapsto\left(\frac{1-y}{1-xy},x\right)$$

なる作用を考える．c を繰り返し作用させることで,

$$D_1\mapsto D_2\mapsto D_3\mapsto D_4\mapsto D_5\mapsto D_1$$

したがって,

$$P_1\mapsto P_2\mapsto P_3\mapsto P_4\mapsto P_5\mapsto P_1$$

となる．$U_1=\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x,y]$ とすると,

$$(z_1,w_1)=(x,y),(z_2,w_2)=\left(y,\frac{1-x}{1-xy}\right),(z_3,w_3)=\left(\frac{1-x}{1-xy},1-xy\right),$$

$$(z_4,w_4)=\left(1-xy,\frac{1-y}{1-xy}\right),(z_5,w_5)=\left(\frac{1-y}{1-xy},x\right)$$

によって $U_i:=c^{i-1}(U_1)$ は $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[z_i,w_i]$ と表される．

4.3.2　2 変数多重ポリログの微分方程式

定義 4.43. $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_k)\in\mathbb{Z}^k_{>0},\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_l)\in\mathbb{Z}^l_{>0}$ **に対して，2 変数（形式的）多重ポリログを,**

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)=\sum_{\substack{m_1<\cdots<m_k<n_1<\cdots<n_l,\\ m_i,n_j\in\mathbb{Z}_{>0}}}\frac{x^{m_k}y^{n_l}}{m_1^{a_1}\cdots m_k^{a_k}n_1^{b_1}\cdots n_l^{b_l}}\tag{4.5}$$

で定義する．

命題 4.44. 以下が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)\\
&=\begin{cases}
\dfrac{1}{x}\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k-1),\mathbf{b}}(x,y) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k\neq 1\\
\dfrac{1}{1-x}\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1}),\mathbf{b}}(x,y)-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1},b_1),(b_2,\cdots,b_l)}(x,y)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k=1,k\neq 1,l\neq 1,\\
\dfrac{1}{1-x}\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}(y)-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{Li}_{(b_1),(b_2,\cdots,b_l)}(x,y)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k=1,k=1,l\neq 1,\\
\dfrac{1}{1-x}\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1}),\mathbf{b}}(x,y)-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1},b_1)}(xy)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k=1,k\neq 1,l=1,\\
\dfrac{1}{1-x}\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}(y)-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}(xy)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k=1,k=1,l=1.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}Li_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)&=\begin{cases}
\dfrac{1}{y}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},(b_1,\cdots,b_{l-1},b_l-1)}(x,y) & \text{if } b_l\neq 1\\
\dfrac{1}{1-y}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},(b_1,\cdots,b_{l-1})}(x,y) & \text{if } b_l=1,l\neq 1\\
\dfrac{1}{1-y}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(xy) & \text{if } b_l=1,l=1
\end{cases}\\
\frac{d}{dx}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)&=\begin{cases}
\dfrac{1}{x}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1},c_h-1)}(xy) & \text{if } c_h\neq 1\\
\dfrac{y}{1-xy}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1})}(xy) & \text{if } c_h=1,h\neq 1\\
\dfrac{y}{1-xy} & \text{if } c_h=1,h=1
\end{cases}\\
\frac{d}{dy}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)&=\begin{cases}
\dfrac{1}{y}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1},c_h-1)}(xy) & \text{if } c_h\neq 1\\
\dfrac{x}{1-xy}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1})}(xy) & \text{if } c_h=1,h\neq 1\\
\dfrac{x}{1-xy} & \text{if } c_h=1,h=1
\end{cases}\\
\frac{d}{dx}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)&=0\\
\frac{d}{dy}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)&=\begin{cases}
\dfrac{1}{y}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1},c_h-1)}(y) & \text{if } c_h\neq 1,\\
\dfrac{1}{1-y}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1})}(y) & \text{if } c_h=1,h\neq 1\\
\dfrac{1}{1-y} & \text{if } c_h=1,h=1
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

証明. 直接計算による. □

4.3.3 2 変数多重ポリログに対する KZ 方程式

定義 4.45. $\mathfrak{F}_{5,\mathbb{C}_p}$ を $\mathbb{C}_p$ 上 $\{T_{12}, T_{13}, T_{23}, T_{24}, T_{34}\}$ で生成された自由 Lie 代数とし，$\mathcal{U}(\mathfrak{F}_{5,\mathbb{C}_p})$ をその普遍包絡代数，$\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{F}_{5,\mathbb{C}_p})$ をその完備化とする．$\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p}$ を，関係式

$$[t_{ij}, t_{kl}] = 0 \quad \text{if} \ \ \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset \tag{4.7}$$

を満たす元 $\{t_{12}, t_{13}, t_{23}, t_{24}, t_{34}\}$ で生成された Lie 代数とし，$\mathcal{U}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p})$ を $\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p}$ の普遍包絡代数，$\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p})$ をその完備化とする．$p : \mathcal{U}(\mathfrak{F}_{5,\mathbb{C}_p}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p})$ を自然な全射とする．

定義 4.46. $\mathbb{Q}[[x,y]][\log x, \log y] \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{F}_{5,\mathbb{C}_p})$ 上の $D := \overline{\mathcal{M}_{0,5}} \setminus \mathcal{M}_{0,5}$ で対数的特異点をもつ接続 $\widetilde{\nabla}_{\mathrm{KZ}_5}$ を

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\mathrm{KZ}_5} G = dG &- \left(\frac{t_{12}}{x} + \frac{t_{23}}{x-1} + \frac{yt_{24}}{xy-1}\right) G dx \\ &- \left(\frac{t_{12}+t_{13}+t_{23}}{y} + \frac{t_{34}}{y-1} + \frac{xt_{24}}{xy-1}\right) G dy\end{aligned}$$

とする．

微分形式

$$\omega_{T_{12}} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y},\ \omega_{T_{13}} = \frac{dy}{y},\ \omega_{T_{23}} = \frac{dx}{x-1} + \frac{dy}{y},\ \omega_{T_{24}} = \frac{xdy + ydx}{xy-1},\ \omega_{T_{34}} = \frac{dy}{y-1}$$

とし，$T_{12}, T_{13}, T_{23}, T_{24}, T_{34}$ から構成された word $W = T_r \cdots T_2 T_1$ に対して，

$$\widetilde{g}_{\mathrm{KZ}_5} = 1 + \sum_W \left(\int_{(0,0)}^{(x,y)} \omega_{T_r} \circ \cdots \circ \omega_{T_1}\right) W \in \mathbb{Q}[[x,y]][\log x, \log y] \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{F}_{5,\mathbb{C}_p})$$

と定める．ただし，積分は形式的なものとする．形式的な計算により，$\widetilde{g}_{\mathrm{KZ}_5}$ は $(\mathbb{Q}[[x,y]][\log x, \log y] \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{F}_{5,\mathbb{C}_p}), \nabla_{\mathrm{KZ}_5})$ の horizontal section である．

L を，$\{1, e_{\mathbf{a},\mathbf{b}}, e'_{\mathbf{a}}, e''_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$（$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は index 全体を動く）を基底にもつ完備 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間とする．命題 4.44 により，形式的に

$$g_L = 1 + \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y) e_{\mathbf{a},\mathbf{b}} + \sum_{\mathbf{a}} \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(xy) e'_{\mathbf{a}} + \sum_{\mathbf{a}} \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(y) e''_{\mathbf{a}}$$

が何らかの connetion $(\mathbb{Q}[[x,y]][\log x, \log y] \otimes L, \nabla_L = d - \Gamma_L)$ の horizontal section となるように，$(\mathbb{Q}[[x,y]][\log x, \log y] \otimes L, \nabla_L = d - \Gamma_L)$ を定めることができる．ここで，$\Gamma_L \in (\mathrm{End}\ L) \otimes \Omega^1$ は，

$$\Gamma_L = \Gamma_{12}\omega_{T_{12}} + \Gamma_{13}\omega_{T_{13}} + \Gamma_{23}\omega_{T_{23}} + \Gamma_{24}\omega_{T_{24}} + \Gamma_{34}\omega_{T_{34}} \ \ (\Gamma_\bullet \in \mathrm{End}\ L)$$

と表すことができる．$p_L : \mathcal{U}(\mathfrak{F}_{5,\mathbb{C}_p}) \to \mathrm{End}\ L$ を，$T_{ij} \mapsto \Gamma_{ij}$ によって定義する（この base change も p_L と表す）．さらに，$\mathrm{ev}_1 : \mathrm{End}\ L \to L$ を 1 での値を返す写像とする．

命題 4.47. $g_L = \mathrm{ev}_1(p_L(\widetilde{g}_{\mathrm{KZ}_5}))$ である．

証明. 以上の構成と，命題 4.44 から従う． □

Γ_{ij} たちは (4.7) を満たすので，$q_L : \mathcal{U}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p}) \to \mathrm{End}\, L$ を用いて $p_L = q_L \circ p$ と経由する．さらに，$\delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}, \delta'_{\mathbf{a}}, \delta''_{\mathbf{a}}$ を，それぞれ L の元にその $e_{\mathbf{a},\mathbf{b}}, e'_{\mathbf{a}}, e''_{\mathbf{a}}$ の係数を対応させる写像とし，

$$s_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \circ \mathrm{ev}_1 \circ q_L,\ s'_{\mathbf{a}} = \delta'_{\mathbf{a}} \circ \mathrm{ev}_1 \circ q_L,\ s''_{\mathbf{a}} = \delta''_{\mathbf{a}} \circ \mathrm{ev}_1 \circ q_L$$

とする． さらに，$p(\widetilde{g}_{\mathrm{KZ}_5}) = g_{\mathrm{KZ}_5}$ とおく．これで，形式的に

$$s_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(g_{\mathrm{KZ}_5}) = \mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y),\ s'_{\mathbf{a}}(g_{\mathrm{KZ}_5}) = \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(xy),\ s''_{\mathbf{a}}(g_{\mathrm{KZ}_5}) = \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(y)$$

と定まった．

定義 4.48. $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{0,5,\mathbb{C}_p}} \widehat{\otimes}\, \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p})$ 上の D で対数的特異点をもつ 接続 ∇_{KZ_5} を

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathrm{KZ}_5} G = dG &- \left(\frac{t_{12}}{x} + \frac{t_{23}}{x-1} + \frac{yt_{24}}{xy-1}\right) G dx \\ &- \left(\frac{t_{12}+t_{13}+t_{23}}{y} + \frac{t_{34}}{y-1} + \frac{xt_{24}}{xy-1}\right) G dy\end{aligned}$$

とする．

補題 4.49. ∇_{KZ_5} は可積分である．

証明. 直接計算，特に関係式 (4.7) による． □

補題 4.50. g_{KZ_5} は，

$$g_{\mathrm{KZ}_5} \in A^{\mathrm{rig}}\left(\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}_p) \cap](0,0)[_{\overline{\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}_p)}}\right) [\log x, \log y] \widehat{\otimes}\, \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p})$$

であり，$g_{\mathrm{KZ}_5}(x,y) \approx x^{t_{12}} y^{t_{12}+t_{13}+t_{23}}$ $((x,y) \to (0,0))$（すなわち，$\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}, x, y) = 1$）である．逆に，$\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{0,5,\mathbb{C}_p}}, \nabla_{\mathrm{KZ}_5}\right)^{\dagger}$ の horizontal section でこのようなものはただ 1 つである．

証明. 一意性は，補題 4.26, 定理 4.27 と同様に示すことができる．

存在についても，定理 4.27 と同様にできる．今回の場合，微分方程式に登場する

$$\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, \frac{dx}{x-1}, \frac{dy}{y-1}, \frac{ydx + xdy}{xy-1}$$

のうち，後者の 3 つについては原始関数にあたる $\log(x-1), \log(y-1), \log(xy-1)$ が $A^{\mathrm{rig}}\left(\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}_p) \cap](0,0)[_{\overline{\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}_p)}}\right)$ の元であるとみなすことができるから，$g_{\mathrm{KZ}_5}(x,y)$ は反復積分によって繰り返し $A^{\mathrm{rig}}\left(\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}_p) \cap](0,0)[_{\overline{\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}_p)}}\right) [\log x, \log y] \widehat{\otimes}\, \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p})$ の元であるとみなすことができる． □

この補題により，上記によって形式的に与えられていた $s^{\dagger}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(g_{\mathrm{KZ}_5}) = \mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)$，$s'^{\dagger}_{\mathbf{a}}(g_{\mathrm{KZ}_5}) = \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(xy)$，$s''^{\dagger}_{\mathbf{a}}(g_{\mathrm{KZ}_5}) = \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(y)$ は，$A^{\mathrm{rig}}\left(\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}_p) \cap](0,0)[_{\overline{\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C}_p)}}\right) [\log x, \log y]$ の元とみなすことができる．これは，定義 4.43 によるものに他ならない．したがって，次の定理が得られたことになる．

定理 4.51. p 進多重ポリログは，それぞれ

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)=\left[\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}_{0,5,\mathbb{C}_p}}}\widehat{\otimes}\,\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p}),s_{\mathbf{a},\mathbf{b}},g_{\mathrm{KZ}_5}\right],\ \mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(xy)=\left[\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}_{0,5,\mathbb{C}_p}}}\widehat{\otimes}\,\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p}),s'_{\mathbf{a}},g_{\mathrm{KZ}_5}\right],$$

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(y)=\left[\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}_{0,5,\mathbb{C}_p}}}\widehat{\otimes}\,\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p}),s''_{\mathbf{a}},g_{\mathrm{KZ}_5}\right]\in A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(\overline{\mathcal{M}_{0,5}},D,\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}_{0,5}}})$$

というように 代数的起源の Coleman 関数 としてみなすことができる．ただし，$D=\overline{\mathcal{M}_{0,5}}\setminus\mathcal{M}_{0,5}$ としている．

注意 4.52. 厳密には，注意 4.42 と同じように，$T_\bullet$ に関して「有限次で打ち止めた」加群を考えなければならない．すなわち，ここでは $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}_{0,5,\mathbb{C}_p}}}\widehat{\otimes}\,\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p})$ などは，圏 $\mathsf{Un}(\overline{\mathcal{M}_{0,5,\mathbb{C}_p}},D)$ の pro-object だとみなしている．

4.3.4 調和積公式と複シャッフル関係式の証明

ここでは $Y=\overline{\mathcal{M}_{0,5}},X=\mathcal{M}_{0,5},D=Y\setminus X$ として 代数的起源の Coleman 関数の理論を適用する．

定義 4.53. (1) $M\in\mathsf{Un}(Y_K,D_K)$ に対し，$M^\dagger$ の horizontal section y を $N^{00}_{D,J}$ に解析接続した元を $y^{(D_J)}$ とかく．

(2) $f\in A^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{Col}}(\overline{\mathcal{M}_{0,5}},D,\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}_{0,5}}})$ に対して，$f^{(D_J)}:=\mathrm{Res}_{D,J}\,f$ とおく．

(3) $F_{\mathbf{a},\mathbf{b}}:=\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)-\mathrm{Li}_{\mathbf{ab}}(xy)$ とし，$G_{\mathbf{c}}=\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)-\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)$ とする．

定義 4.54. g_{KZ_5} の定数項 $\in\mathbb{C}_p\otimes\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{B}_{5,\mathbb{C}_p})$ の定義と同様に，$s_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(g_{\mathrm{KZ}_5})$ の定数項 $\in\mathbb{C}_p$ を同様に定める（これもまた，パラメータに依存する）．明らかに，$s_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(g_{\mathrm{KZ}_5})$ の定数項とは，g_{KZ_5} の定数項の $s_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ による像である．

補題 4.55. 任意の $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ に対して，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_1)}\equiv 0,\mathrm{Li}_{\mathbf{ab}}(xy)^{(D_1)}\equiv 0,\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_1)}\equiv 0$ である．特に，$F^{(D_1)}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\equiv G^{(D_1)}_{\mathbf{c}}\equiv 0$ である．

証明. 座標 $(z_1, w_1) = (x, y)$ によって D_1 は方程式 $w_1 = 0$ で与えられる．命題 3.77 によって，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\overline{z_1}}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_1)} \\
&= \begin{cases}
\dfrac{1}{\overline{z_1}}\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k-1),\mathbf{b}}(x,y)^{(D_1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k \neq 1 \\
\dfrac{1}{1-\overline{z_1}}\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1}),\mathbf{b}}(x,y)^{(D_1)} - \left(\dfrac{1}{\overline{z_1}} + \dfrac{1}{1-\overline{z_1}}\right)\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1},b_1),(b_2,\cdots,b_l)}(x,y)^{(D_1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k = 1, k \neq 1, l \neq 1, \\
\dfrac{1}{1-\overline{z_1}}\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}(y)^{(D_1)} - \left(\dfrac{1}{\overline{z_1}} + \dfrac{1}{1-\overline{z_1}}\right)\mathrm{Li}_{(b_1),(b_2,\cdots,b_l)}(x,y)^{(D_1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k = 1, k = 1, l \neq 1, \\
\dfrac{1}{1-\overline{z_1}}\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1}),\mathbf{b}}(x,y)^{(D_1)} - \left(\dfrac{1}{\overline{z_1}} + \dfrac{1}{1-\overline{z_1}}\right)\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1},b_1)}(xy)^{(D_1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k = 1, k \neq 1, l = 1, \\
\dfrac{1}{1-\overline{z_1}}\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}(y)^{(D_1)} - \left(\dfrac{1}{\overline{z_1}} + \dfrac{1}{1-\overline{z_1}}\right)\mathrm{Li}_{\mathbf{b}}(xy)^{(D_1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } a_k = 1, k = 1, l = 1.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\overline{z_1}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)^{(D_1)} &= \begin{cases}
\dfrac{1}{\overline{z_1}}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1},c_h-1)}(xy)^{(D_1)} & \text{if } c_h \neq 1 \\
0 & \text{if } c_h = 1, h \neq 1 \\
0 & \text{if } c_h = 1, h = 1
\end{cases} \\
\frac{d}{d\overline{z_1}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_1)} &= 0
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

であることがわかる．同様に，$\frac{d}{d\overline{w_1}}$ についても式が得られる．また，補題 4.50 と

$$
\begin{aligned}
\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}; z_1, w_1) &= g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_{51})}((\overline{z_1}, \overline{w_1}) = (1,1)) \quad (\text{命題 } 3.65) \\
&= g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_1)(D'_{51})}((\overline{z_1}, \overline{w_1}) = (1,1)) \quad (\text{命題 } 3.56) \\
&= \mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_1)}; \overline{z_1}, \overline{w_1}) \quad (\text{命題 } 3.65)
\end{aligned}
$$

より，$\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_1)}; \overline{z_1}, \overline{w_1}) = 1$ である．したがって，

$$
\mathrm{const}\left((\mathrm{Gr}_1\, s_{\mathbf{a},\mathbf{b}})^{\dagger}(g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_1)}), \overline{z_1}, \overline{w_1}\right) = 0
$$

などが成り立つ．これらから，帰納的に $\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_1)}, \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(x,y)^{(D_1)}, \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_1)}$ は恒等的に 0 であることが得られる． □

補題 4.56. $\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}; z_2, w_2) = \mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}; z_1 - 1, w_1)$ である．

証明. $v = \mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}; z_2, w_2)$ として，

$$
g_{\mathrm{KZ}_5} = v + \sum_{\max\{i,j,k,l\} \geq 1} a_{ijkl} z_2^i w_2^j (\log z_2)^k (\log w_2)^l
$$

の形で表示する． $z_2=w_1, w_2=\frac{1-z_1}{1-z_1w_1}$ を用いて $z_2, w_2, \log z_2, \log w_2$ を $1-z_1, w_1, \log(1-z_1), \log w_1$ の級数として表示すると, $z_2^i w_2^j (\log z_2)^k (\log w_2)^l$ の項は $1-z_1, w_1, \log(1-z_1), \log w_1$ に関して 1 次以上であることがわかる．したがって, この文字変換で定数項 v は変わらない． □

補題 4.57. $\mathbf{a}$ が admissible であるならば，$F^{(D_2)}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \equiv 0$ であり，また，任意の $\mathbf{c}$ に対して $G^{(D_2)}_{\mathbf{c}} \equiv 0$ である．

証明. 座標 $(z_2, w_2)=\left(y, \dfrac{1-x}{1-xy}\right)$ によって命題 4.44 の各式を書き直すと

$$\frac{d}{dz_2}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{w_2}{1-z_2w_2}\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k-1),\mathbf{b}}(x,y)+\dfrac{1}{z_2}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},(b_1,\cdots,b_{l-1},b_l-1)}(x,y) \\ \hfill \text{if } a_k>1, b_l\neq 1, \\ \dfrac{w_2}{1-z_2w_2}\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k-1),\mathbf{b}}(x,y)+\dfrac{1}{1-z_2}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},(b_1,\cdots,b_{l-1})}(x,y) \\ \hfill \text{if } a_k>1, b_l=1, l\neq 1, \\ \dfrac{w_2}{1-z_2w_2}\mathrm{Li}_{(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k-1),\mathbf{b}}(x,y)+\dfrac{1}{1-z_2}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(xy) \\ \hfill \text{if } a_k>1, b_l=1, l=1\end{cases}$$

$$\frac{d}{dz_2}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)=\begin{cases}\left(\dfrac{w_2}{1-z_2w_2}+\dfrac{1}{z_2}\right)\cdot\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1},c_h-1)}(xy) & \text{if } c_h\neq 1 \\ \left(\dfrac{z_2w_2(1-w_2)}{(z_2-1)(z_2w_2-1)}+\dfrac{w_2-1}{z_2-1}\right)\cdot\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1})}(xy) & \text{if } c_h=1, h\neq 1 \\ \dfrac{z_2w_2(1-w_2)}{(z_2-1)(z_2w_2-1)}+\dfrac{w_2-1}{z_2-1} & \text{if } c_h=1, h=1\end{cases}$$

$$\frac{d}{dz_2}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{z_2}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1},c_h-1)}(y) & \text{if } c_h\neq 1, \\ \dfrac{1}{1-z_2}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1})}(y) & \text{if } c_h=1, h\neq 1 \\ \dfrac{1}{1-z_2} & \text{if } c_h=1, h=1\end{cases}$$

D_2 は方程式 $w_2=0$ で与えられるので，命題 3.77 によって，

$$\frac{d}{d\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},(b_1,\cdots,b_{l-1},b_l-1)}(x,y)^{(D_2)} & \text{if } a_k>1, b_l\neq 1,\\ \dfrac{1}{1-\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},(b_1,\cdots,b_{l-1})}(x,y)^{(D_2)} & \text{if } a_k>1, b_l=1, l\neq 1,\\ \dfrac{1}{1-\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(xy)^{(D_2)} & \text{if } a_k>1, b_l=1, l=1\end{cases}$$

$$\frac{d}{d\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)^{(D_2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1},c_h-1)}(xy)^{(D_2)} & \text{if } c_h\neq 1\\ \dfrac{1}{1-\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1})}(xy)^{(D_2)} & \text{if } c_h=1, h\neq 1\\ \dfrac{1}{1-\overline{z_2}} & \text{if } c_h=1, h=1\end{cases}$$

$$\frac{d}{d\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1},c_h-1)}(y)^{(D_2)} & \text{if } c_h\neq 1,\\ \dfrac{1}{1-\overline{z_2}}\mathrm{Li}_{(c_1,\cdots,c_{h-1})}(y)^{(D_2)} & \text{if } c_h=1, h\neq 1\\ \dfrac{1}{1-\overline{z_2}} & \text{if } c_h=1, h=1\end{cases} \tag{4.9}$$

となる．同様に，

$$\frac{d}{d\overline{w_2}}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_2)}=0$$
$$\frac{d}{d\overline{w_2}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)^{(D_2)}=0$$
$$\frac{d}{d\overline{w_2}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_2)}=0$$

である．したがって，$\mathbf{a}$ が admissible であるならば，

$$\frac{d}{d\overline{w_2}}F_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}=\frac{d}{d\overline{z_2}}F_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}=0,\ \frac{d}{d\overline{w_2}}G_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}=\frac{d}{d\overline{z_2}}G_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}=0$$

であるから，$F_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}, G_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}$ は定数である．

$$\begin{aligned}\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5};z_1-1,w_1)&=g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_{12})}((\overline{z_1-1},\overline{w_1})=(1,1))\\&=g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_1)(D'_{12})}((\overline{z_1-1},\overline{w_1})=(1,1))\\&=\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_1)};\overline{z_1-1},\overline{w_1})\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5};z_2,w_2)&=g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_{12})}((\overline{z_2},\overline{w_2})=(1,1))\\&=g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_2)(D'_{12})}((\overline{z_2},\overline{w_2})=(1,1))\\&=\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_2)};\overline{z_2},\overline{w_2})\end{aligned}$$

である．補題 4.56 と合わせると，

$$\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_2)};\overline{z_2},\overline{w_2})=\mathrm{const}(g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_1)};\overline{z_1-1},\overline{w_1})$$

を得る．補題 4.55 より，$(\mathrm{Gr}_1\, s_{\mathbf{a},\mathbf{b}})^\dagger(g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_1)})$ などの定数項は 0 であるから，
$\mathrm{const}\left((\mathrm{Gr}_2\, s_{\mathbf{a},\mathbf{b}})^\dagger(g_{\mathrm{KZ}_5}^{(D_2)}), \overline{z_2}, \overline{w_2}\right)$ などは 0 である．したがって，
$\mathrm{const}\left(F_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}, \overline{z_2}, \overline{w_2}\right), \mathrm{const}\left(G_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}, \overline{z_2}, \overline{w_2}\right)$ も 0 であり，$F_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}, G_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_2)}$ は定数であったことから恒等的に 0 であることに他ならない． □

補題 4.58. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が admissible であるならば，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_3)}, \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)^{(D_3)}, \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_3)}$ は定数である．特に，$F_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(D_3)} = 0, G_{\mathbf{c}}^{(D_3)} = 0$ である．

証明. 座標 $(z_3, w_3) = \left(\dfrac{1-x}{1-xy}, 1-xy\right)$ によって命題 4.44 の各式を書き直すと

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz_3}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y) &= \frac{w_3}{z_3w_3-1}\mathrm{Li}_{(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k-1),\mathbf{b}}(x,y) + \frac{w_3}{1-z_3w_3}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},(b_1,\cdots,b_{l-1},b_l-1)}(x,y) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{if } a_k>1 \text{ and } b_l>1, \\
\frac{d}{dz_3}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{if } c_h>1, \\
\frac{d}{dz_3}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y) &= \frac{w_3}{1-z_3w_3}\mathrm{Li}_{(c_1,\ldots,c_{h-1},c_h-1)}(y) \qquad\qquad\qquad\text{if } c_h>1,
\end{aligned}$$

D_3 は方程式 $w_3 = 0$ で与えられているので，命題 3.77 によって，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が admissible であるならば，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\overline{z_3}}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_3)} &= \frac{d}{d\overline{w_3}}\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_3)} = 0, \\
\frac{d}{d\overline{z_3}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)^{(D_3)} &= \frac{d}{d\overline{w_3}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)^{(D_3)} = 0, \\
\frac{d}{d\overline{z_3}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_3)} &= \frac{d}{d\overline{w_3}}\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_3)} = 0 \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_3)}, \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)^{(D_3)}, \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_3)}$ は定数であり，$F_{\mathbf{a},\mathbf{b}}, G_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ は定数である．補題 4.57 と同様の議論から，その値は 0 である． □

定義 4.59. admissible な指標 $\mathbf{c}$ に対して，***p* 進多重ゼータ値（pMZV）**$\zeta_p(\mathbf{c})$ を，

$$\zeta_p(\mathbf{c}) := \mathrm{const}(\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(z), z)$$

で定義する．この定義と定義 4.22 における定義が一致することは，(4.3) が示している．

命題 4.60. (1) $\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y)^{(D_3)}$ は定数であり，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が admissible であるならば，その値は $\zeta_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ に等しい．

(2) $\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)^{(D_3)}, \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_3)}$ は定数であり，$\mathbf{c}$ が admissible であるならば，その値は $\zeta_p(\mathbf{c})$ に等しい．

証明. 補題 4.58 より，$\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_3)}$ に関して主張を示せばよい．補題 4.55 より，$\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_1)} = 0$ である．また，(4.6),(4.9) の微分方程式の形が同じであることから，$\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_2)} = \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(\overline{z_2})$ であ

る．したがって，

$$\begin{aligned}\zeta_p(\mathbf{c}) &= \mathrm{const}(\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(\overline{z_2}), \overline{z_2}) \\ &= \mathrm{const}(\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_2)}, \overline{z_2}) \\ &= \mathrm{const}(\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_2)}, \overline{z_2}, \overline{w_2}) \\ &= \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_2)(D'_{23})}((\overline{z_2}, \overline{w_2}) = (1,1)) \\ &= \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_{23})}((\overline{z_2}, \overline{w_2}) = (1,1)) \\ &= \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_3)(D'_{23})}((\overline{z_2}, \overline{w_2}) = (1,1)) \\ &= \mathrm{const}(\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_3)}, \overline{z_2}, \overline{w_2}) \\ &\equiv \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(y)^{(D_3)} \quad (\text{補題 } 4.58)\end{aligned}$$

である． □

命題 4.61． (1) $\mathrm{Li}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(y,x)^{(D_3)}$ は定数であり，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が admissible であるならば，その値は $\zeta_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ に等しい．

(2) $\mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(xy)^{(D_3)}, \mathrm{Li}_{\mathbf{c}}(x)^{(D_3)}$ は定数であり，$\mathbf{c}$ が admissible であるならば，その値は $\zeta_p(\mathbf{c})$ に等しい．

証明．D_5, D_4, D_3 について同様に議論する． □

定理 4.62 (pMZV に対する調和積公式)**．** admissible な $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して，

$$\zeta_p(\mathbf{a})\zeta_p(\mathbf{b}) = \zeta_p(\mathbf{a} * \mathbf{b})$$

が成り立つ．

証明．命題 4.9 より，

$$\zeta_p(\mathbf{a})\zeta_p(\mathbf{b}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}^{\leq}(k,l)} \zeta_p(\widetilde{\sigma}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

を示せばよい．まず，形式的に（すなわち，$]0[$ においては）

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(x) \cdot \mathrm{Li}_{\mathbf{b}}(y) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}^{\leq}(k,l)} \mathrm{Li}^{\sigma}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y) \tag{4.11}$$

である．ここで，

$$Z^{\sigma}_{+} = \{(c_1, ..., c_{k+l}) \in \mathbb{Z}^{k+l}_{>0} \mid c_i < c_j \text{ if } \sigma(i) < \sigma(j), c_i = c_j \text{ if } \sigma(i) = \sigma(j)\}$$

とおいたときに，

$$\mathrm{Li}^{\sigma}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y) := \sum_{(m_1,\dots,m_k,n_1,\dots,n_l) \in Z^{\sigma}_{+}} \frac{x^{m_k} y^{n_l}}{m_1^{a_1} \cdots m_k^{a_k} n_1^{b_1} \cdots n_l^{b_l}},$$

としている．

(i) $\sigma(k) = \sigma(k+l)$ のとき，$\mathbf{a}'$ を用いて $\mathrm{Li}^{\sigma}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y) = \mathrm{Li}^{\sigma}_{\mathbf{a}'}(xy)$ という形をしている．但し，$\mathbf{a}'$ の末尾は $a_k + b_l$ であり，$\mathbf{a}'$ は admissible である．

(ii) $\sigma(k) < \sigma(k+l)$ のとき，何らかの $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ を用いて $\mathrm{Li}^{\sigma}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y) = \mathrm{Li}^{\sigma}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}(x,y)$ という形をしている．但し，$\mathbf{a}'$ の末尾は a_k，$\mathbf{b}'$ の末尾は b_l であり，共に admissible である．

(iii) $\sigma(k) > \sigma(k+l)$ のとき，何らかの $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ を用いて $\mathrm{Li}^{\sigma}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(x,y) = \mathrm{Li}^{\sigma}_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}(y,x)$ という形をしている．但し，$\mathbf{a}'$ の末尾は b_l，$\mathbf{b}'$ の末尾は a_k であり，共に admissible である．

(4.11) を $N^{00}_{D,3}$ に解析接続し，命題 4.60,4.61 を用いると，p 進多重ゼータ値に関する等式を得る．それは，定理の等式に他ならない． □

この定理と，定理 4.41 より，p 進多重ゼータ値に対する複シャッフル関係式を得る：

定理 4.63 (pMZV に対する複シャッフル関係式)**.** admissible な $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して，

$$\zeta_p(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = \zeta_p(\mathbf{a} \mathbin{ш} \mathbf{b})$$

が成り立つ．

参考文献

[Ber96] Berthelot, P., *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Premiière partie. Prépublication IRMAR (1996), 96-03.

[Bes00] Besser, A., *Syntomic regulators and p-adic integration II: K_2 of curves*, Israel J. Math. 120 (2000), part B, 335-359.

[Bes02] Besser, A., *Coleman integration using the Tannakian formalism*, Math. Ann. 322 (2002), no. 1, 19-48.

[BdJ03] Besser, A., de Jeu, R., *The Syntomic Regulator for the K-theory of fields*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 36 (2003), no. 6, 867-924 (2004).

[BF06] Besser, A., Furusho, H., *The double shuffle relations for p-adic multiple zeta values*, Primes and knots, Contemp. Math., 416, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006), 9-29.

[Chi98] Chiarellotto, B., *Weights in rigid cohomology applications to unipotent F-isocrystals.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 31 (1998), no.5, 683-715.

[CLS99] Chiarellotto, B., Le Stum, B., *F-isocristaux unipotents*, Compositio Math. 116 (1999), no. 1, 81-110.

[Col82] Coleman, R., *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math. 69 (1982), no.2, 171-208.

[Cre92] Crew, R., *F-isocrystals and their monodromy groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 25 (1992), no. 4, 429-464.

[DM18] Deligne P., Milne J.S., *Tannakian Categories*, (2018). https://www.jmilne.org/math/xnotes/tc2018.pdf

[EV92] Esnault, H., Viehweg, E., *Lectures on Vanishing Theorems*, DMV 20, Birkhauser, (1992).

[Fur04] Furusho, H., *p-adic multiple zeta values I - p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation*, Invent. Math. 155 (2004), no. 2, 253-286.

[Fur07] Furusho, H., *p-adic multiple zeta values II - Tannakian interpretations*, Amer. J. Math. 129 (2007), no. 4, 1105-1144.

[FJ07] Furusho, H., Jafari, A., *Regularization and generalized double shuffle relations for p-adic multiple zeta values*, Compos. Math. 143 (2007), no. 5, 1089-1107.

[LS07] Le Stum, B., *Rigid Cohomology*, Cambridge Tracts in Math., 172, Cambridge Univ. Press, (2007).

[加藤 13] 加藤 文元, 『リジッド幾何学入門』, 岩波数学叢書, 岩波出版 (2013).

[都築 98] 都築 暢夫, 『*Rigid cohomology* 入門』, 数理解析研究所講究録,1073 (1998), 160-167.

[原 19] 原 隆, 『「実／複素ゼータの世界」から「p 進ゼータの世界」へ』, 第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」報告集 (2019), 57-159.