# $p$ 進ポリログと $p$ 進特殊関数

古賀　真輝 *

2023 年 4 月 2 日

## 0. 目次



* 私立甲陽学院中学校・高等学校数学科教諭

# 1. 準備

## 1.1. 特殊化写像

**定義** 1. $\mathrm{sp} : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p} \to \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ を特殊化写像とする．すなわち，
$a \in \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ の sp による逆像を，$]a[$ とかく．

## 1.2. 円板上のリジッド解析関数

ここでは，$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p} \setminus \{0, 1, \infty\}$ とし，$a \in X$ を中心とする閉円板[*1]

$$D(a; r) = \{z \in X \mid |z - a|_p \leq r\}$$

を考える．これは，アフィノイド

$$\mathrm{Spm}\, \mathbb{C}_p \left\{ \frac{z-a}{r} \right\}$$

である．ただし，関数環は

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D(a; r)) := \mathbb{C}_p \left\{ \frac{z-a}{r} \right\} &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left( \frac{z-a}{r} \right)^k \;\middle|\; b_k \in \mathbb{C}_p, \lim_{k \to \infty} |b_k|_p = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \;\middle|\; a_k \in \mathbb{C}_p, \lim_{k \to \infty} |a_k|_p r^k = 0 \right\}\end{aligned}$$

である．また，$a \in X$ を中心とする開円板は，

$$D^\circ(a; r) = \{z \in X \mid |z - a|_p < r\}$$

で与えられる．リジッド解析空間としては，

$$D^\circ(a; r) = \varinjlim_{s \uparrow r} D(a; s)$$

として定義され，関数環は，

$$\mathcal{A}(D^\circ(a; r)) := \varprojlim_{s \uparrow r} \mathbb{C}_p \left\{ \frac{z-a}{r} \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \;\middle|\; a_k \in \mathbb{C}_p, \lim_{k \to \infty} |a_k|_p s^k = 0 \ (\forall s < r) \right\}$$

である．

## 1.3. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p} \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上のリジッド解析関数

[*1] 位相的に「閉じている」という意味で名付けているわけではない（実際には開かつ閉）．境界を含めているという意味で閉と名付けている

引き続き，$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p} \setminus \{0, 1, \infty\}$ とする．$D^\circ(a; r, 1) = \{z \in X \mid r < |x - a|_p < 1\}$ とおくと，$a \in \{0, 1\}$ に対して，

$$\mathcal{A}(D^\circ(a; r, 1)) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k \;\middle|\; \lim_{k\to\infty} |a_k|_p s^k = 0 \ (\forall s < 1), \lim_{k\to-\infty} |a_k|_p t^k = 0 \ (\forall t > r) \right\}$$

## 2. $p$ 進ポリログ

**定義** 2. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathbb{Z}^k_{>0}$ に対して，**$p$ 進多重ポリログ（$p$MPL）**$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}} : ]0[ \to \mathbb{C}_p$ を，

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{\substack{m_1 < m_2 < \cdots < m_k, \\ m_i \in \mathbb{Z}_{>0}}} \frac{z^{m_k}}{m_1^{a_1} m_2^{a_2} \cdots m_k^{a_k}} \tag{2.1}$$

で定義する．$z \in ]0[$ において右辺の級数が収束することは，以下の命題による．

**命題** 3. 上の定義で，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ は $]0[$ で収束し，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(1)$ は発散する．

**[証明]**

$p$ 進における無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ が収束することと，$p$ 進の意味で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ であることが同値なことに注意しよう．$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ の $z^N$ の係数を $t_N^{(k)} := \displaystyle\sum_{\substack{m_1 < m_2 < \cdots < N, \\ m_i \in \mathbb{Z}_{>0}}} \frac{1}{m_1^{a_1} m_2^{a_2} \cdots N^{a_k}}$ とする．

$$\begin{aligned}\min_{m_1 < m_2 < \cdots < N} \mathrm{ord}_p \frac{1}{m_1^{a_1} m_2^{a_2} \cdots N^{a_k}} &= -\max_{m_1 < m_2 < \cdots < N} \mathrm{ord}_p (m_1^{a_1} m_2^{a_2} \cdots N^{a_k}) \\ &\geq -(a_1 + \cdots + a_k) \log_p N\end{aligned}$$

であるから，超距離不等式より

$$|t_N^{(k)}|_p \leq p^{(a_1 + \cdots + a_k)\log_p N} = N^{(a_1 + \cdots + a_k)}$$

である．$|z|_p < 1$ であるならば，

$$|t_N^{(k)} z^N|_p \leq N^{(a_1 + \cdots + a_k)} |z|_p^N \to 0 \quad (N \to \infty)$$

であるから，$p$ 進における無限級数の収束条件から，$|z|_p < 1$ において $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ は収束する．
次に，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(1)$ が発散することを $k$ に関する帰納法で示す．$k = 1$ のときは，$|t_N^{(1)}|_p = |N^{a_1}|_p^{-1} \geq 1$ より，$\displaystyle\sum_{N=1}^{\infty} t_N^{(1)}$ は発散する．
次に $k > 1$ のときは，

$$|t_N^{(k)}|_p = |N^{a_k}|_p^{-1} \cdot \left| \sum_{i=1}^{N-1} t_i^{(k-1)} \right|_p \geq \left| \sum_{i=1}^{N-1} t_i^{(k-1)} \right|_p$$

であり，帰納法の仮定から $\sum_{i=1}^{N-1} t_i^{(k-1)}$ は $N\to\infty$ のとき発散するので，$t_N^{(k)}$ は $0$ に収束しない．したがって，主張が示された． ■

**補題 4.** $z\in ]0[$ とすると，

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z}\mathrm{Li}_{a_1,\dots,a_k-1}(z) & (a_k\geq 2)\\ \dfrac{1}{1-z}\mathrm{Li}_{a_1,\dots,a_{k-1}}(z) & (k\geq 2\ かつ\ a_k=1)\end{cases}$$
$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_1(z)=\frac{1}{1-z}$$

**[証明]**

$a_k\geq 2$ のとき，

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)=\sum_{\substack{m_1<m_2<\dots<m_k,\\ m_i\in\mathbb{Z}_{>0}}}\frac{z^{m_k-1}}{m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots m_k^{a_k-1}}=\frac{1}{z}\mathrm{Li}_{a_1,\dots,a_k-1}(z)$$

$k\geq 2$ かつ $a_k=1$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)&=\sum_{\substack{m_1<m_2<\dots<m_k,\\ m_i\in\mathbb{Z}_{>0}}}\frac{z^{m_k-1}}{m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots m_{k-1}^{a_{k-1}}}\\&=\sum_{\substack{m_1<m_2<\dots<m_{k-1},\\ m_i\in\mathbb{Z}_{>0}}}\frac{z^{m_{k-1}}}{m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots m_{k-1}^{a_{k-1}}}(1+z+z^2+\cdots)\\&=\frac{1}{1-z}\mathrm{Li}_{a_1,\dots,a_{k-1}}(z)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_1(z)=1+z+z^2+\cdots=\frac{1}{1-z}$$

■

**補題 5.** $\dfrac{1}{z},\dfrac{1}{1-z}\in\mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(X)$ である．

**[証明]**

$a=0$ のとき，

$$\frac{1}{z}\in\mathcal{A}(D^\circ(a;0,1))$$

である．

$|a|_p=1$ なる $a$ に対しては，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+z-a}=\sum_{k=0}^{\infty}a^{-(k+1)}(a-z)^k$$

であることと $|a^{-(k+1)}|_p=1$ より，$\dfrac{1}{z}\in\mathcal{A}(D^\circ(a;1))\subset\mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(]\overline{a}[)$ である．

$a = \infty$ のとき，$z = \dfrac{1}{w}$ の変数変換をすれば，明らかに $w = 0$ の近傍でリジッド解析関数であることが分かる．以上から，$\dfrac{1}{z} \in \mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(X)$ である．$\dfrac{1}{1-z}$ についても，$1 - z = w$ の変数変換をすることで $\dfrac{1}{z}$ と同様の議論となる． ■

ここで，

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z \frac{1}{t}\mathrm{Li}_{a_1,\dots,a_k-1}(t)dt & (a_k \geq 2) \\ \displaystyle\int_0^z \frac{1}{1-t}\mathrm{Li}_{a_1,\dots,a_{k-1}}(t)dt & (k \geq 2 \text{ かつ } a_k = 1) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{Li}_1(z) = \int_0^z \frac{1}{1-t}dt = -\log^{\varpi}(1-z) \tag{2.3}$$

によって帰納的に定義することで，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z) \in \mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(X')$ を定めたい（$X' = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p} \setminus \{1, \infty\}$）．

**補題** 6. (2.2), (2.3) によって，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ は $\mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(X')$ の元で，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(0) = 0$ であるようなものとして定まる．

[証明]

まず，**補題** 5. によって，$\dfrac{1}{1-z} \in \mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(X)$ であり，$]0[$ では級数展開よりリジッド解析関数であるから，$\dfrac{1}{1-z} \in \mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(X')$ である．これを積分することで，$\mathrm{Li}_1(z) \in \mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(X')$ として定まる．
さらに，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(0) = 0$ であることは積分から明らかである．
次に，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ が題意のように定義されているとすると，**補題** 5. によって $\dfrac{1}{1-z}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z), \dfrac{1}{z}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z) \in \mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(X')$ である．ただし $]0[$ では，$\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(0) = 0$ より，$\dfrac{1}{z}\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ は（$z = 0$ でも値が定まる）リジッド解析的な関数になっていることに注意する．積分してできた関数も $\mathcal{A}_{\mathrm{Col}}(X')$ の元である．そして，積分の形から $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(0) = 0$ であることもわかる．よって，帰納的に主張が示された． ■

**定義** 7. **補題** 6. によって定まる $\mathrm{Li}_{\mathbf{a}}(z)$ を，（Coleman 関数としての）***p* 進多重ポリログ (*p*MPL)** という．