第１回の宿題

全ての 4 で割って 3 余る素数 p が，平方数の和の形（a, b を整数として $p = a^2 + b^2$ の形）で表せないことを示せ．

第２回の宿題

$a + b\omega$（a, b は整数で，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$）という形をした複素数をアイゼンシュタイン整数といい，アイゼンシュタイン整数全体の集合を $\mathbb{Z}[\omega]$ とかく．アイゼンシュタイン整数同士の和・差・積もアイゼンシュタイン整数であることを示せ．

第３回の宿題

アイゼンシュタイン整数 $\alpha = a + b\omega$（a, b は整数で，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$）のノルムを，

$$\mathrm{N}(\alpha) = |\alpha|^2$$

と定める．ただし絶対値は複素数としての絶対値である．$\mathrm{N}(\alpha)$ を a, b で表せ．この形から，ノルム $\mathrm{N}(\alpha)$ は整数であることがわかる．さらに，ノルムは絶対値の 2 乗だから，常に 0 以上であることに注意しよう．このノルムの概念を用いて $\mathbb{Z}[\omega]$ の単元（1 の約数，つまりかけて 1 になるアイゼンシュタイン整数が存在するアイゼンシュタイン整数のこと）をすべて求めよ．

第４回の宿題

(1) ガウス整数の割り算 $(7+4i) \div (2+i)$ の商と余りを求めよ．

(2) アイゼンシュタイン整数 α, β（ただし $\beta \neq 0$）に対して，

$$\alpha = \beta\gamma + \delta, \quad \mathrm{N}(\delta) < \mathrm{N}(\beta)$$

となるアイゼンシュタイン整数 γ, δ が存在することを示せ．

Hint. アイゼンシュタイン整数 $\alpha = a + b\omega$（a, b は整数で，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$）のノルムは，$\mathrm{N}(\alpha) = a^2 - ab + b^2$ で定義された．複素平面にアイゼンシュタイン整数がどこに現れるか図示せよ．ガウス整数の場合の証明と同じように，商 γ は α/β に最も近いアイゼンシュタイン整数をとれ．このとき，γ と α/β の距離が 1 未満であることを示せ．

第５回の宿題

(1) まず整数の世界 $\mathbb{Z}$ で，イデアル $(12, 15)$，$(7, 9)$ を単項イデアル (α)（α は整数）で表せ．

(2) 次にガウス整数の世界 $\mathbb{Z}[i]$ で，イデアル $(4+5i, 2+3i)$，$(-1+9i, 1+5i)$ を単項イデアル (α)（α はガウス整数）で表せ．

第６回の宿題

次の 3 つのガウス整数は，素元であるかどうか判定せよ：$2, 3, 5$.

Hint. 既約元かどうか判定するのが分かりやすい．ここでノルムの性質（α, β をガウス整数とすると，$\mathrm{N}(\alpha\beta) = \mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta)$ が成立すること）を用いるとよい．

第７回は宿題無し．

第８回の宿題

次の 3 つのガウス整数を素因数分解せよ：$35, 1+3i, 21+12i$