

1. 複素数の演算

問題 1. 複素数の演算

次の計算をせよ.

(1) $\frac{1+2i}{1-3i}$

(2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$

2. 代数学の基本定理

問題 2. n 次方程式

次の方程式を解け.

(1) $x^4 = 1$

(2) $x^2 - x + 2 = 0$

(3) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

(4) $x^2 + ix + 5 - 5i = 0$

3. 複素数平面の定義

問題 3. 複素数平面上の点

次の点を複素数平面上に図示せよ.

(1) $1 + 4i$ (2) $-2 + 3i$ (3) $2i$

4. 複素数の実数倍

問題 4. 複素数平面の実数倍

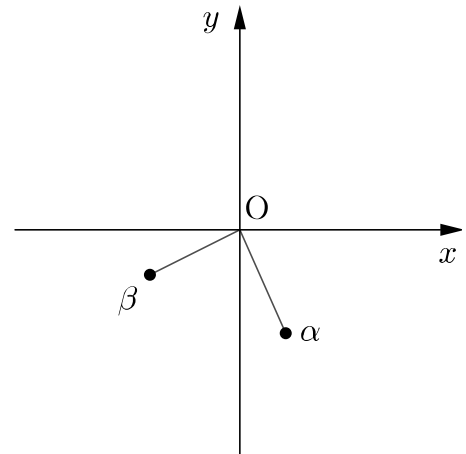
複素数平面上の4点 $0, \sqrt{3} + i, 1 + ai, b - 2i$ が同一直線上にあるとき、実数 a, b の値を求めよ。

5. 複素数の和と差

問題 5. 複素数の和と差

右図のように、複素数平面上に点 α, β がある。次の点を図示せよ：

- ① $\alpha + \beta$, ② $\alpha - \beta$, ③ $-\frac{\alpha}{2}$, ④ $-2\alpha + \beta$



6. 共役な複素数

問題 6.1. 共役な複素数

次の複素数と共役な複素数を求めよ。

- (1) $-i$ (2) 2 (3) $(1 + 2i)(2 - 3i)$

問題 6.2. 実数係数方程式の解

a, b を実数とする。 x の3次方程式は、 $x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ は、 $x = 1 - 2i$ を解にもつ。残りの解と、 a, b を求めよ。

7. 実数・純虚数条件

問題 7. 実数・純虚数条件

- (1) α, β を複素数とする. $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ が実数であることを証明せよ.
- (2) z を $\pm i$ でない複素数とする.
- ① $z\bar{z} + 1 \neq 0$ を示せ. (これは $z = \pm i$ でも成立する)
- ② $\frac{z}{1+z^2}$ が純虚数になる z の条件を求めよ.

8. 複素数の絶対値

問題 8.1. 絶対値 ①

$\alpha = 1 - 2i, \beta = 3 - i$ とする.

- (1) $|\alpha|, |\alpha\beta|, \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|, |\bar{\alpha}\beta^2|$ を求めよ.
- (2) α と β の距離を求めよ.
- (3) $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right|$ を求めよ.

問題 8.2. 絶対値 ②

α, β を複素数とする. $|\alpha| = 1, |\beta| = 2, |\alpha + \beta| = 2$ のとき, $|\alpha - \beta|$ を求めよ.

9. 極形式

問題 9. 極形式

次の複素数を極形式で表せ.

- (1) $1 + i$ (2) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ (3) -2 (4) i (5) $\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$
- (6) $-2(\cos \theta - i \sin \theta)$ (θ は実数) (7) $1 + \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 < \theta < \pi$)