0. はじめに

- 数学 III（新課程数学 C）「複素数平面」の初学者，そして理論をきちんと学習したい人を対象に，一から理論を重視して解説しています.
- 「複素数平面」の基礎事項を一通り押さえ，応用問題を解く上での基盤をしっかりさせる本質の理解を目標としています.
- 各回は，理論編テキストとそれを解説した動画，及び演習問題プリントとその解説動画がセットになっています．理論編で一通り必要事項は扱いますが，それらを使いこなせるようになるためにも演習問題をぜひ活用してください.
- このテキストの節番号と動画の番号が対応しています. 例えばここは 0 節なので，この内容は動画 0 番のガイダンスで説明されています.
- 内容ごとに各回を分けています．そのため，回によって分量はまちまちです.
- **【目次】**

1.　複素数の演算

定義 1. **複素数**とは，2 つの実数 a, b を用いて形式的に $a + bi$ という形をした数のことである．$a = 0$ のときは単に bi とかき（さらに $1 \cdot i = i$ とかき)，$b = 0$ のときは a とかく．

定義 2. 2 つの複素数 $a + bi, c + di$（a, b, c, d は実数）が**等しい**とは，$a = c, b = d$ であることをいう．

定義 3. a, b, c, d はすべて実数とする．2 つの複素数 $a + bi$ と $c + di$ の加減乗除は次のように定義される：[*1]

加法 $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

減法 $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

乗法 $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

除法 $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$　　ただし，$c + di \neq 0$

このように演算を定義すると，

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1$$

と計算できる．演算から $i^2 = -1$ を導くことができた．i を**虚数単位**という．

以下の計算法則は定義に従って計算することで証明される．ここでは省略する．

【定理 4： 複素数の計算法則】

α, β, γ を任意の複素数とする．次の性質が成り立つ：

(1) **和の交換法則**　$\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) **積の交換法則**　$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

(3) **和の結合法則**　$(\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$

(4) **積の結合法則**　$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

(5) **分配法則**　$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$,　　$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

$b = 0$ のとき，$a + 0 \cdot i$ は実数 a に対応する．しかも上記で説明した複素数の計算法則を $b = 0$ の場合に制限して考えると，実数についての計算規則になっている．従って，複素数は実数をその計算法則も含めて拡張したものであると言える．

計算をする実用の上では，i を単なる文字だと思い i^2 が出てきたら -1 で置き換えるというルールのもと，**定理 4.** の計算法則など今までの計算法則に従って計算すれば良い．高校数学の教科書ではこのように i を $i^2 = -1$ として定義してから演算について考えるが，このテキストでは複素数を形式的に

[*1] 厳密には，加法と乗法を定義すると，減法と除法は体の公理から出てきます

$a+bi$ という形をした数だとし，その演算を定めてから $i^2=-1$ を導く方法で導入した．これはハミルトン流の複素数の定義である．「理論講座」と名を付けている以上，今回このような複素数の定義に関する理論を紹介した．同じ対象でも，定義する順番や方法は様々なのである．

◆ **例 5.** $1+2i, 2+3i$ の加減乗除を計算してみよう．

- $(1+2i)+(2+3i)=(1+2)+(2+3)i=3+5i$
- $(1+2i)-(2+3i)=(1-2)+(2-3)i=-1-i$
- $(1+2i)\cdot(2+3i)=(1\cdot 2-2\cdot 3)+(1\cdot 3+2\cdot 2)i=-4+7i$
- $\dfrac{1+2i}{2+3i}=\dfrac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{8+i}{13}$ 除算については**定義 3.** を丸暗記して計算するよりかは，上記のように計算する方が良い．実際，**定義 3.** における除算の定義はこの方法を一般化して定義として述べ直したに過ぎない．

2. 代数学の基本定理

複素数をなぜ導入するか，その一つの答えとして次の定理の存在が挙げられる：

【定理 6： 代数学の基本定理】

複素数係数の n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad (a_\bullet \text{は複素数で，} a_n \neq 0)$$

は複素数の範囲で解をもつ．従って，左辺は複素数 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ を用いて

$$a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = 0$$

の形に因数分解される．

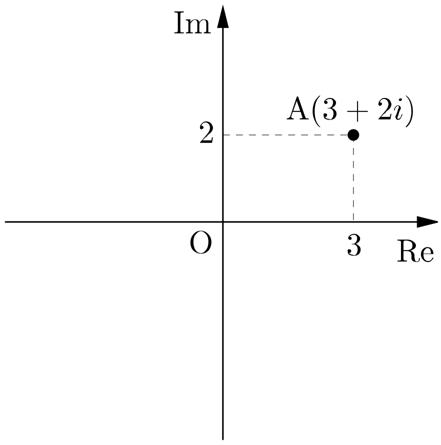
代数学の基本定理は，ガウス（Gauss）が最初に証明を与えた．今日における代数学の基本定理の証明の一般的な方法は，（ガウスの証明と同様に）複素関数論を用いた方法である．それは複素関数論を知っていればそれほど難しくはないが，今の我々にとっては難しい．初等的な方法もあることにはあるが，ここでは省略する．

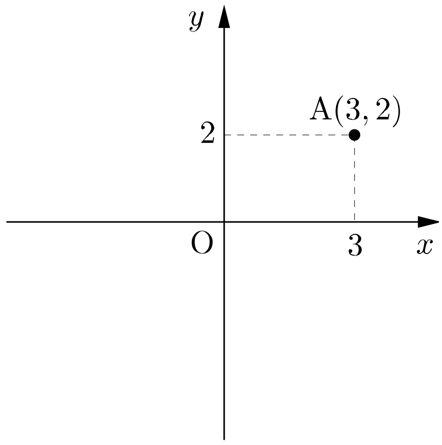
実数係数の n 次方程式は，すべての解を実数に持つとは限らなかった．それは $x^2+1=0$ という方程式を考えれば明らかなことである．そこで，複素数という数を導入することを考える（それは $x^2+1=0$ の解を実数に「添加」させるということでもある）．すると，複素数の範囲では複素数係数の n 次方程式はその中で解を持ち，ある意味これ以上広げる必要のない閉じた世界だということになる．このような点から複素数全体は（実数全体の）代数閉包である，と呼ぶ．これは複素数の重要な性質の一つである．その他，複素数は豊かな解析理論（微分・積分の理論）を形成するなど，代数に限られない幅広い美しさをもっているのだ．

3.　複素数平面の定義

定義 7. 複素数 $\alpha = a + bi$（a, b は実数）に対して，a を α の**実部**（real part）といい，b を α の虚部（imaginary part）という．α の実部を $\mathrm{Re}\,\alpha$，虚部を $\mathrm{Im}\,\alpha$ とかく．

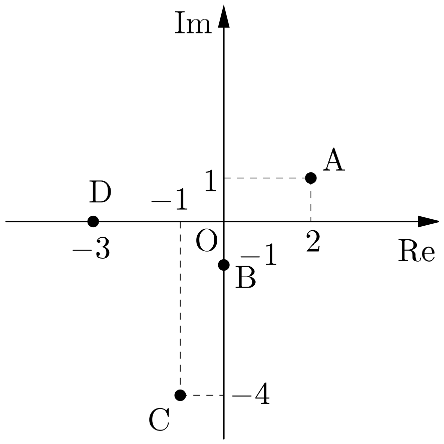
複素数 $a + bi$（a, b は実数）は，実数のペア (a, b) と同一視できる．このように，複素数を実数のペアだと思って座標平面上に図示したものを**複素数平面**という．複素数 $a + bi$ の x 座標が実部 a，y 座標が虚部 b になるように点を plot したのが，複素数平面である．x 軸に相当するものが**実軸**，y 軸に相当するものを**虚軸**といい，それぞれそのまま x, y と表示することもあるし，Re, Im と表示することもある．この節では後者を採用しているが，次の節以降は検定教科書に従って前者を採用する．複素数平面上で点 A に複素数 α が対応するとき，$\mathrm{A}(\alpha)$ と書く．点 α と呼ぶこともある．





複素数平面（左）と座標平面（右）

◆ **例 8.** 複素数平面上に点 $\mathrm{A}(2 + i)$，点 $\mathrm{B}(-i)$，点 $\mathrm{C}(-1 - 4i)$，点 $\mathrm{D}(-3)$ を図示すると右のようになる．



4. 複素数の実数倍

【定理 9： 複素数の実数倍】

α を 0 でない複素数とする．複素数平面上において，複素数 β について，

$$3\text{ 点 }0, \alpha, \beta\text{が一直線上にある} \iff \beta = k\alpha\text{となる実数 }k\text{ が存在する}$$

である．

これは，次のベクトルに関する定理に対応している．

【定理 10： ベクトルの実数倍】

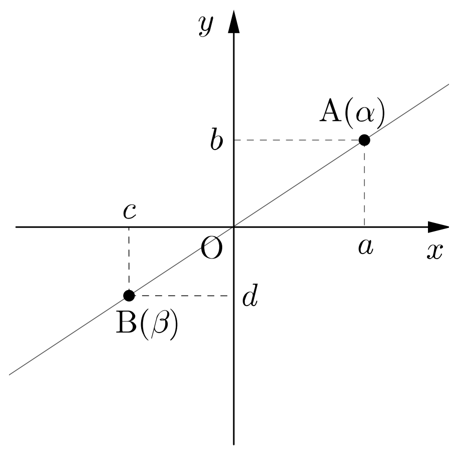
座標平面上で，A を O と異なる点とする．このとき，点 B について，

$$3\text{ 点 O, A, B が一直線上にある} \iff \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{となる実数 }k\text{ が存在する}$$

である．

この 2 つの定理が同じことを主張していることを確認しよう．

複素数平面上において，A(α)，B(β) とし，$\alpha = a+bi, \beta = c+di$（$a, b, c, d$ は実数）とおく．**定理 9,10.** の左辺が同じことを主張していることは明らかであろう．一方で右辺については，$\beta = k\alpha$ は



$$c + di = k(a + bi)$$

すなわち（実部と虚部を比較して）

$$c = ka \text{ かつ } d = kb$$

を主張している．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

すなわち（両成分を比較して）やはり

$$c = ka \text{ かつ } d = kb$$

を主張している．

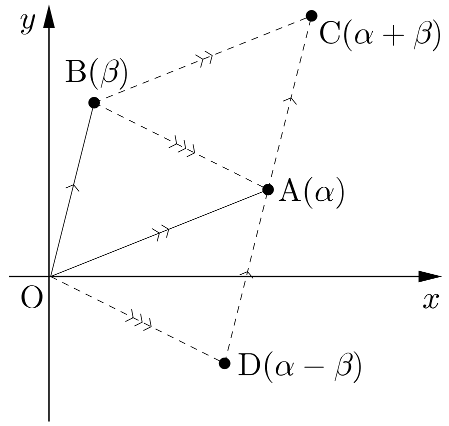
要するに，この 2 つの定理は，O,A,B という 3 点の一直線上にあるという情報を，位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて実数のペアとして計算しているか，複素数 α, β を用いて 1 つの数として計算しているかだけの違いである．

◆ **例 11.** 原点 O，$\alpha = 1 + 3i$，$\beta = 3 + ai$ が一直線にあるような実数 a を求めよう．

$$
\begin{aligned}
&3\text{ 点 O, A, B が一直線上にある}\\
\Longleftrightarrow\ &\beta = k\alpha\text{となる実数 } k \text{ が存在する}\\
\Longleftrightarrow\ &3 + ai = k(1 + 3i)\text{ となる実数 } k \text{ が存在する}\\
\Longleftrightarrow\ &3 = k\text{ かつ } a = 3k\text{ となる実数 } k \text{ が存在する}\\
\Longleftrightarrow\ &a = 9
\end{aligned}
$$

5. 複素数の和と差

複素数平面上の点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta)$ を考える．$\alpha = a + bi, \beta = c + di$（$a, b, c, d$ は実数）とおくと，これらの和と差は



$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

と計算される．和と差に対応する複素数の表す点をそれぞれ C,D とする．一方，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の和は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \pm \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm c \\ b \pm d \end{pmatrix}$$

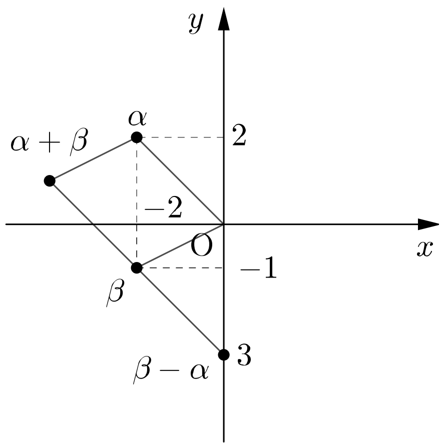
となるので，それぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ に対応していることがわかる．すなわち，複素数の和と差はベクトルの和と差と同じように平面上で表現されることがわかる．特に，差については，$\alpha - \beta$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を位置ベクトルに持つ点に対応している．

◆ **例 12.** $\alpha = -2 + 2i$，$\beta = -2 - i$ とする．

$$\alpha + \beta = -4 + i$$

$$\beta - \alpha = -3i$$

であり，それぞれを複素数平面上に図示すると右のようになる：

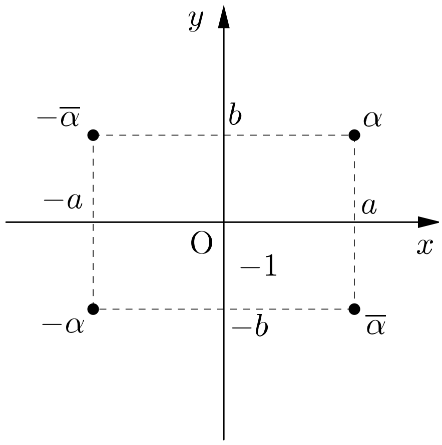


6. 共役な複素数

定義 13. 複素数 $\alpha = a + bi$（a, b は実数）に対して，$\overline{\alpha} = a - bi$ を α と**共役な**複素数という．

◆ **例 14.** $\alpha = 2 - 3i$ と共役な複素数は，$\overline{\alpha} = 2 + 3i$ である．

$\overline{\alpha}$ は α の虚部の符号を反転させた複素数であるから，座標平面では y 座標の符号が反転することに対応し，$\overline{\alpha}$ は α と x 軸対称な点である．同様に，α と原点対称な点は x, y 座標の符号がともに反転するので $-\alpha$ に対応し，y 軸対称移動させた点は，$\overline{\alpha}$ を原点対称に移動させた点であるので $-\overline{\alpha}$ である．



【定理 15： 共役】

α, β を複素数とする．このとき，次が成立する．

(1) $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$
(2) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$
(3) $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$
(4) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$
(5) $\beta \neq 0$ のとき $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$
(6) $\alpha \neq 0$ のとき，n を整数とすると，$(\overline{\alpha})^n = \overline{\alpha^n}$

［証明］

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$（$a, b, c, d$ は整数）とおく．

(1) $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{a - bi} = a + bi = \alpha$ より示された．
(2) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$ であり，
$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$ より示された．
(3) $\overline{\alpha - \beta} = \overline{(a - c) + (b - d)i} = (a - c) - (b - d)i$ であり，
$\overline{\alpha} - \overline{\beta} = (a - bi) - (c - di) = (a - c) - (b - d)i$ より示された．
(4) $\overline{\alpha\beta} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ であり，
$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$ より示された．

(5) まずはじめに，$\overline{\left(\dfrac{1}{\beta}\right)} = \dfrac{1}{\overline{\beta}} \cdots (*)$ を示す．

$$\overline{\left(\frac{1}{\beta}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+bi}\right)} = \overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right)} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$$

であり，

$$\frac{1}{\overline{\beta}} = \frac{1}{a-bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$$

であるから，$(*)$ が示された．これを用いると，

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} &= \overline{\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right)} \\
&= \overline{\alpha} \cdot \overline{\left(\frac{1}{\beta}\right)} \quad \text{((4) より)} \\
&= \overline{\alpha} \cdot \frac{1}{\overline{\beta}} \quad \text{($(*)$ より)} \\
&= \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}
\end{aligned}$$

となり示された．

(6) まず，$n=0$ のときは，両辺ともに 1 であるから明らかである．n が自然数であるときに数学的帰納法で示す．$n=1$ のときは明らかである．$n=k$（$k=1,2,3,...$）のとき正しいとする．すなわち，$(\overline{\alpha})^k = \overline{\alpha^k}$ を仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}
(\overline{\alpha})^{k+1} &= (\overline{\alpha})^k \cdot \overline{\alpha} \\
&= \overline{\alpha^k} \cdot \overline{\alpha} \quad \text{(帰納法の仮定より)} \\
&= \overline{\alpha^k \cdot \alpha} \quad \text{((4) より)} \\
&= \overline{\alpha^{k+1}}
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも正しく，数学的帰納法によって n が自然数のときは示された．

ところで，(5) の $(*)$ は，$n=-1$ の場合にこの主張を示している．これを踏まえ，$n=-m$ (m=1,2,3,...) と表されるときには，

$$\begin{aligned}
(\overline{\alpha})^n &= (\overline{\alpha})^{-m} \\
&= \{(\overline{\alpha})^m\}^{-1} \\
&= (\overline{\alpha^m})^{-1} \quad \text{(m が自然数の場合)} \\
&= \overline{(\alpha^m)^{-1}} \quad \text{($(*)$ より)} \\
&= \overline{\alpha^{-m}} \\
&= \overline{\alpha^n}
\end{aligned}$$

と示される．よって，整数 n に対して主張は成立する．

■

【定理 16： 共役解】

実数係数 n 次方程式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

について，複素数 $x = \alpha$ が解であるならば，$x = \overline{\alpha}$ も解である．

［証明］

$x = \alpha$ が解であることから，

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

が成立する．一方で，

$$\begin{aligned}
&a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_1(\overline{\alpha}) + a_0 \\
&= \overline{a_n} \cdot (\overline{\alpha})^n + \overline{a_{n-1}} \cdot (\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + \overline{a_1} \cdot (\overline{\alpha}) + \overline{a_0} \quad \text{（実数は自身と共役が等しい〈後述}\textbf{定理 18.}\text{〉）} \\
&= \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} \quad \text{（}\textbf{定理 14(6).}\text{）} \\
&= \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} \quad \text{（}\textbf{定理 14(4).}\text{）} \\
&= \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} \quad \text{（}\textbf{定理 14(2).}\text{）} \\
&= \overline{0} = 0
\end{aligned}$$

よって，$\overline{\alpha}$ もまた与えられた方程式の解である．

■

◆ **例 17.** $x^2 + x + 2 = 0$ の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ である．$\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{7}i}{2}$ とすると，$\overline{\alpha} = \dfrac{1 - \sqrt{7}i}{2}$ も解になっている．

7.　実数・純虚数条件

【定理 18： 実部と虚部】

α を複素数とすると，

$$\mathrm{Re}\,\alpha = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}, \quad \mathrm{Im}\,\alpha = \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}$$

［証明］

$\alpha = a+bi \cdots$ ①（a, b は実数）とおくと，$\overline{\alpha} = a-bi \cdots$ ② である．①, ② を辺々足すと

$$\alpha+\overline{\alpha} = 2a \quad \therefore \mathrm{Re}\,\alpha = a = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$$

また，① から ② を引くと

$$\alpha-\overline{\alpha} = 2bi \quad \therefore \mathrm{Im}\,\alpha = b = \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}$$

■

定義 19. 複素数 $\alpha = a+bi$（a, b は実数）が，$b \neq 0$ であるとき**虚数**であるという．また，$a = 0$ かつ $b \neq 0$（すなわち $a = 0$ かつ $\alpha \neq 0$）であるとき**純虚数**であるという．

複素数平面上において，実数は x 軸上にある点であり，虚数は x 軸上にない点のことである．さらに，純虚数は y 軸上の原点以外の点である．

【定理 20： 実数・純虚数条件】

α を複素数とすると，

(1) α が実数である $\iff \alpha = \overline{\alpha}$

(2) α が純虚数である $\iff \alpha = -\overline{\alpha}$ かつ $\alpha \neq 0$

［証明］

(1)

$$\begin{aligned} \alpha\text{が実数である} &\iff \mathrm{Im}\,\alpha = 0 \\ &\iff \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i} = 0 \\ &\iff \alpha-\overline{\alpha} = 0 \\ &\iff \alpha = \overline{\alpha} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \alpha\text{が純虚数である} &\iff \mathrm{Re}\,\alpha = 0 \text{ かつ } \alpha \neq 0 \\ &\iff \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2} = 0; \text{かつ } \alpha \neq 0 \\ &\iff \alpha+\overline{\alpha} = 0 \text{ かつ } \alpha \neq 0 \\ &\iff \alpha = -\overline{\alpha} \text{ かつ } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

■

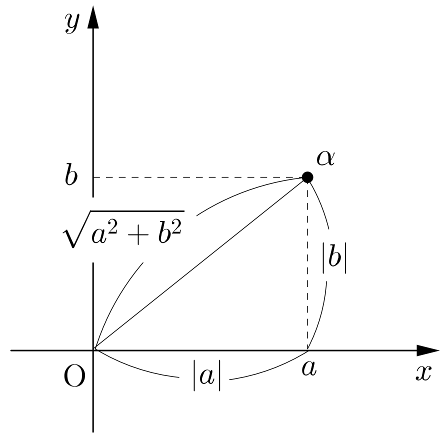
実数であることは，複素数平面上において x 軸上にあることと同値で，それは x 軸対称移動させても変化しないことと言い換えられる．α を x 軸対称移動させた点は $\overline{\alpha}$ であるから，このことは $\alpha = \overline{\alpha}$ であるということである．

一方で，純虚数であることは，複素数平面上においてが原点を除いた y 軸上にあることと同値で，それは原点でなく，かつ y 軸対称移動させても変化しないことと言い換えられる．α を y 軸対称移動させた点は $-\overline{\alpha}$ であるから，このことは $\alpha \neq 0$ かつ $\alpha = -\overline{\alpha}$ であるということである．

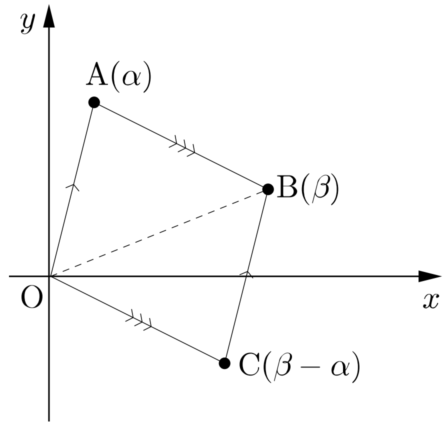
8.　複素数の絶対値

定義 21.
複素数 $\alpha = a + bi$（a, b は実数）に対して，$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$ を α の**絶対値**という．

a, b は実数であるから，$|\alpha|$ は 0 以上の実数であることがわかる．さらに，右図のような状況から，三平方の定理を用いることによって α の絶対値が α と原点の距離に他ならないことも直ちにわかる．



【定理 22： 2 点間の距離】
2 点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta)$ 間の距離は，$|\beta - \alpha|$ である．



［証明］
$\mathrm{C}(\beta - \alpha)$ とすると，四角形 OABC が平行四辺形になることから，$\mathrm{AB} = \mathrm{OC}$ である．OC は C の絶対値に他ならず，従って $\mathrm{AB} = |\beta - \alpha|$ である．

■

【定理 23： 絶対値の性質】
α, β を複素数とする．

(1) $|\alpha|^2 = \alpha \cdot \overline{\alpha}$
(2) $|\alpha| = |\overline{\alpha}| = |-\alpha|$
(3) $|\alpha| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$
(4) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
(5) $\beta \neq 0$ のとき，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$
(6) $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$（三角不等式）

［証明］
$\alpha = a + bi, \beta = c + di$（$a, b, c, d$ は実数）とおく．

(1) $|\alpha|^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2+b^2$ であり，$\alpha\cdot\overline{\alpha} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ であることから従う．

(2) $|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$，$|\overline{\alpha}| = \sqrt{a^2+(-b)^2}$，$|-\alpha| = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2}$ より従う．

(3) $|\alpha| = 0 \iff \sqrt{a^2+b^2} = 0 \iff a^2+b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff \alpha = 0$

(4) (1) 及び**定理 14.**(4) より

$$|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\cdot\overline{\alpha\beta} = \alpha\cdot\beta\cdot\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha}\cdot\beta\overline{\beta} = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2$$

$|\alpha\beta|, |\alpha|\cdot|\beta|$ はともに 0 以上であるから，$|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ である．

(5) (1) 及び**定理 14.**(5) より

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \frac{\alpha}{\beta}\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\alpha\overline{\alpha}}{\beta\overline{\beta}} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}$$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|, |\alpha|\cdot|\beta|$ はともに 0 以上であるから，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ である．

(6) 両辺 0 以上であるから

$$\begin{aligned}
|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta| &\iff |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2 \\
&\iff (\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)} \leq |\alpha|^2+2|\alpha|\cdot|\beta|+|\beta|^2 \quad \text{((1) より)} \\
&\iff (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) \leq |\alpha|^2+2|\alpha\beta|+|\beta|^2 \quad \text{(\textbf{定理 14.}(2) より)} \\
&\iff |\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2 \leq |\alpha|^2+2|\alpha\beta|+|\beta|^2 \quad \text{((1) より)} \\
&\iff \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta \leq 2|\alpha\beta| \\
&\iff 2(ac+bd) \leq 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&\iff ac+bd \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \cdots ①
\end{aligned}$$

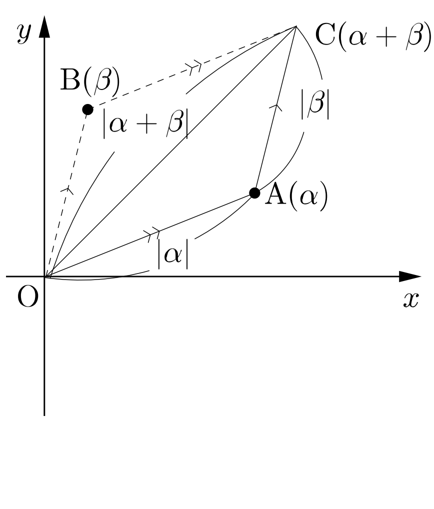
従って ① を示せばよい．$ac+bd < 0$ であるときは，右辺は 0 以上であるから明らか．$ac+bd \geq 0$ であるときは，① は両辺を 2 乗した

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

と同値で，これは Cauchy-Schwarz の不等式に他ならない．

■

(3) については 10 節でも示すこととなる．一方で，(4) は三角不等式という名前がついている通り，「三角形の二辺の長さの和は，他の一辺の長さより大きい」ことを複素数を用いて表現したものである．実際，右図のように $\mathrm{A}(\alpha)$,$\mathrm{B}(\beta)$ として $\mathrm{C}(\alpha+\beta)$ とすると，$|\alpha+\beta| = \mathrm{OC}$ かつ $|\alpha|+|\beta| = \mathrm{OA}+\mathrm{OB} = \mathrm{OA}+\mathrm{AC}$ であるから，三角形の辺の長さの関係を表したものであることが分かるであろう（この方法だと，厳密には三角形ができない場合についても議論が必要である）．

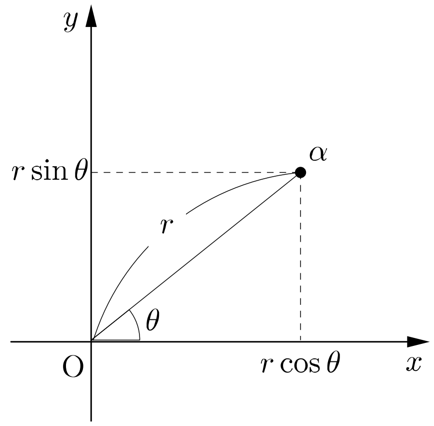


9. 極形式

右図のように，0 でない複素数 $\mathrm{A}(\alpha)$ に対して，$|\alpha| = r$ として，動径 OA を x 軸の正の方向から測った角度を θ とする．このとき，α の x 座標（実部）は $r\cos\theta$ で，α の y 座標（虚部）は $r\sin\theta$ であるから，

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdots ①$$

と表される．この表示を α の**極形式**という．



定義 24. 上の説明において，r を α の絶対値，θ を α の**偏角**という．$r = |\alpha|$ とかき，$\theta = \arg\alpha$ とかく．

逆に，原点からの距離 $r > 0$ と x 軸の正の方向から測った角度 θ を与えると，① によって複素数 α が一意に定まる．

複素数に対して，絶対値はただ 1 つに定まるが，偏角は 2π の整数倍だけのズレが考えられる．$0 \leq \arg\alpha < 2\pi$ もしくは $-\pi \leq \arg\alpha < \pi$ の範囲に制限すれば偏角もただ 1 つに定まる．

そのような偏角の 2π の整数倍のズレを考慮し（分枝の取り方という），arg の入った等式は 2π の整数倍のズレを除いて等しいことを意味することとする．

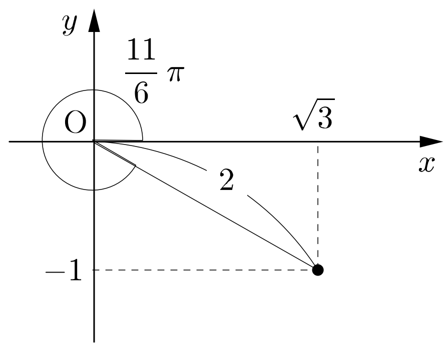
◆ **例 25.** $\alpha = \sqrt{3} - i$ の極形式を求めよう．絶対値は $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ であり，偏角 θ は

$$2\cos\theta = \sqrt{3}, \quad 2\sin\theta = -1$$

を満たす角度で，$\theta = \dfrac{11}{6}\pi$ である．よって，α の極形式は

$$\alpha = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$$

である．



$$\alpha = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

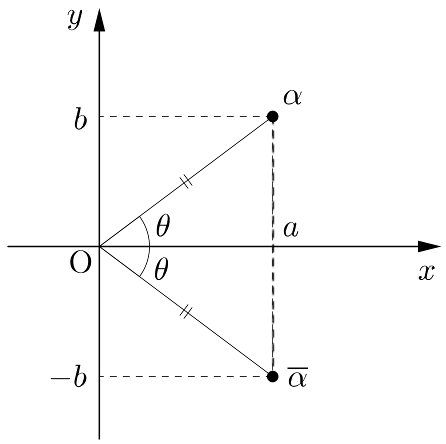
などというように偏角は整数 n を用いて $\theta = \dfrac{11}{6}\pi + 2n\pi$ と表される角度のいずれかを用いれば良い．

【定理 26： 共役の極形式】

0 でない複素数 $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$r > 0$，$\theta$ は実数）に対して，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ の極座標表示は $\overline{\alpha} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$ である．

[証明]

$\overline{\alpha}$ は，α の虚部を -1 倍したものなので，絶対値は変わらず偏角が -1 倍となる．



■