1. 複素数の演算

定義 1. **複素数**とは，2 つの実数 a, b を用いて形式的に $a+bi$ という形をした数のことである．$a=0$ のときは単に bi とかき（さらに $1\cdot i=i$ とかき），$b=0$ のときは a とかく．

定義 2. 2 つの複素数 $a+bi, c+di$（a,b,c,d は実数）が**等しい**とは，$a=c, b=d$ であることをいう．

定義 3. a,b,c,d はすべて実数とする．2 つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ の加減乗除は次のように定義される：[*1]

加法 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

乗法 $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

除法 $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$　　ただし，$c+di\neq 0$

このように演算を定義すると，

$$i^2=i\cdot i=(0+1\cdot i)(0+1\cdot i)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+(0\cdot 1+1\cdot 0)i=-1$$

と計算できる．演算から $i^2=-1$ を導くことができた．i を**虚数単位**という．

以下の計算法則は定義に従って計算することで証明される．ここでは省略する．

【定理 4： 複素数の計算法則】

α,β,γ を任意の複素数とする．次の性質が成り立つ：

(1) **和の交換法則** $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) **積の交換法則** $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$

(3) **和の結合法則** $(\alpha+\beta)+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma$

(4) **積の結合法則** $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

(5) **分配法則** $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma,\qquad \alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$

$b=0$ のとき，$a+0\cdot i$ は実数 a に対応する．しかも上記で説明した複素数の計算法則を $b=0$ の場合に制限して考えると，実数についての計算規則になっている．従って，複素数は実数をその計算法則も含めて拡張したものであると言える．

計算をする実用の上では，i を単なる文字だと思い i^2 が出てきたら -1 で置き換えるというルールのもと，**定理 4.** の計算法則など今までの計算法則に従って計算すれば良い．高校数学の教科書ではこのように i を $i^2=-1$ として定義してから演算について考えるが，このテキストでは複素数を形式的に

[*1] 厳密には，加法と乗法を定義すると，減法と除法は体の公理から出てきます

$a+bi$ という形をした数だとし，その演算を定めてから $i^2 = -1$ を導く方法で導入した．これはハミルトン流の複素数の定義である．「理論講座」と名を付けている以上，今回このような複素数の定義に関する理論を紹介した．同じ対象でも，定義する順番や方法は様々なのである．

◆ **例 5.** $1+2i, 2+3i$ の加減乗除を計算してみよう．

- $(1+2i)+(2+3i) = (1+2)+(2+3)i = 3+5i$
- $(1+2i)-(2+3i) = (1-2)+(2-3)i = -1-i$
- $(1+2i)\cdot(2+3i) = (1\cdot 2 - 2\cdot 3)+(1\cdot 3 + 2\cdot 2)i = -4+7i$
- $\dfrac{1+2i}{2+3i} = \dfrac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{8+i}{13}$ 除算については**定義 3.** を丸暗記して計算するよりかは，上記のように計算する方が良い．実際，**定義 3.** における除算の定義はこの方法を一般化して定義として述べ直したに過ぎない．