2−1

問題 2. n 次方程式

次の方程式を解け．

(1) $x^4 = 1$
(2) $x^2 - x + 2 = 0$
(3) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
(4) $x^2 + ix + 5 - 5i = 0$

---

(1) $x^4 = 1$

$\iff x^4 - 1 = 0$

$\iff (x^2-1)(x^2+1) = 0$

$\iff (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = 0$

$\iff x = \pm 1, \pm i.$

(2) $x^2 - x + 2 = 0$

$\iff x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ☆1

(3) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$\iff (x-1)(x^2-5x+6) = 0$

$\iff (x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$\iff x = 1, 2, 3.$

(4). 代数学の基本定理より、複素数解が2つある。

$x = p + qi$ (p, q：実数)

とすると，

$(p+qi)^2 + i(p+qi) + 5 - 5i = 0$

$\iff (p^2 - q^2) + 2pqi + pi - q + 5 - 5i = 0$

$\iff (p^2 - q^2 - q + 5) + (2pq + p - 5)i = 0$

$\iff \begin{cases} p^2 - q^2 - q + 5 = 0 & \cdots ① \\ 2pq + p - 5 = 0 & \cdots ② \end{cases}$

($p^2 - q^2 - q + 5, 2pq + p - 5$ は共に実数だから)

②から $p \neq 0$ であって，

$q = \dfrac{5 - p}{2p}$ …③

これを①に代入して，

$p^2 - \dfrac{p^2 - 10p + 25}{4p^2} - \dfrac{5-p}{2p} + 5 = 0$

$4p^4 - p^2 + 10p - 25 - 10p + 2p^2 + 20p^2 = 0$

$4p^4 + 21p^2 - 25 = 0$

$(4p^2 + 25)(p^2 - 1) = 0$

$p = \pm 1.$

③より $(p, q) = (1, 2), (-1, -3)$

よって，解は

$x = 1 + 2i, -1 - 3i.$

☆1 $\alpha = a + bi$ と $\overline{\alpha} = a - bi$ (共役) がセットで解になっている。