2.　代数学の基本定理

複素数をなぜ導入するか，その一つの答えとして次の定理の存在が挙げられる：

【定理 6： 代数学の基本定理】

複素数係数の n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad （a_\bullet \text{は複素数で，} a_n \neq 0）$$

は複素数の範囲で解をもつ．従って，左辺は複素数 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ を用いて

$$a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = 0$$

の形に因数分解される．

代数学の基本定理は，ガウス（Gauss）が最初に証明を与えた．今日における代数学の基本定理の証明の一般的な方法は，（ガウスの証明と同様に）複素関数論を用いた方法である．それは複素関数論を知っていればそれほど難しくはないが，今の我々にとっては難しい．初等的な方法もあることにはあるが，ここでは省略する．

実数係数の n 次方程式は，すべての解を実数に持つとは限らなかった．それは $x^2+1=0$ という方程式を考えれば明らかなことである．そこで，複素数という数を導入することを考える（それは $x^2+1=0$ の解を実数に「添加」させるということでもある）．すると，複素数の範囲では複素数係数の n 次方程式はその中で解を持ち，ある意味これ以上広げる必要のない閉じた世界だということになる．このような点から複素数全体は（実数全体の）代数閉包である，と呼ぶ．これは複素数の重要な性質の一つである．その他，複素数は豊かな解析理論（微分・積分の理論）を形成するなど，代数に限られない幅広い美しさをもっているのだ．