4.　複素数の実数倍

【定理 9： 複素数の実数倍】

α を 0 でない複素数とする．複素数平面上において，複素数 β について，

$$3\text{ 点 }0, \alpha, \beta\text{が一直線上にある} \iff \beta = k\alpha\text{となる実数 }k\text{ が存在する}$$

である．

これは，次のベクトルに関する定理に対応している．

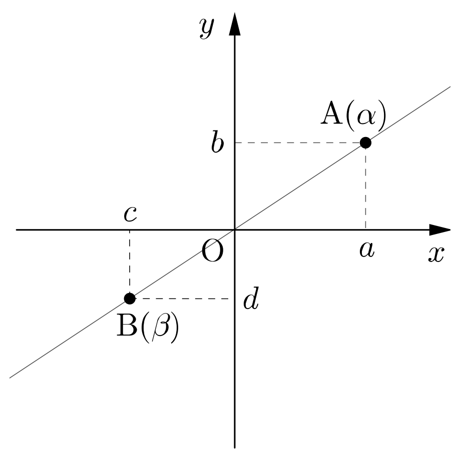
【定理 10： ベクトルの実数倍】

座標平面上で，A を O と異なる点とする．このとき，点 B について，

$$3\text{ 点 }\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}\text{ が一直線上にある} \iff \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{となる実数 }k\text{ が存在する}$$

である．

この 2 つの定理が同じことを主張していることを確認しよう．



複素数平面上において，A(α)，B(β) とし，$\alpha = a+bi, \beta = c+di$（$a, b, c, d$ は実数）とおく．**定理 9,10.** の左辺が同じことを主張していることは明らかであろう．一方で右辺については，$\beta = k\alpha$ は

$$c + di = k(a + bi)$$

すなわち（実部と虚部を比較して）

$$c = ka \text{ かつ } d = kb$$

を主張している．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

すなわち（両成分を比較して）やはり

$$c = ka \text{ かつ } d = kb$$

を主張している．

要するに，この 2 つの定理は，O,A,B という 3 点の一直線上にあるという情報を，位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて実数のペアとして計算しているか，複素数 α, β を用いて 1 つの数として計算しているかだけの違いである．

◆ **例 11.** 原点 O, $\alpha = 1 + 3i$, $\beta = 3 + ai$ が一直線にあるような実数 a を求めよう.

$$
\begin{aligned}
&\text{3 点 O, A, B が一直線上にある} \\
\Longleftrightarrow\ &\beta = k\alpha \text{となる実数 } k \text{ が存在する} \\
\Longleftrightarrow\ &3 + ai = k(1 + 3i) \text{ となる実数 } k \text{ が存在する} \\
\Longleftrightarrow\ &3 = k \text{ かつ } a = 3k \text{ となる実数 } k \text{ が存在する} \\
\Longleftrightarrow\ &a = 9
\end{aligned}
$$