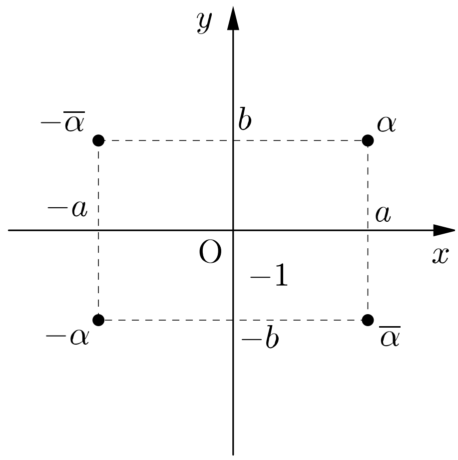
6.　共役な複素数

定義 13. 複素数 $\alpha = a + bi$（a, b は実数）に対して，$\overline{\alpha} = a - bi$ を α と**共役な**複素数という．

◆ **例 14.** $\alpha = 2 - 3i$ と共役な複素数は，$\overline{\alpha} = 2 + 3i$ である．

$\overline{\alpha}$ は α の虚部の符号を反転させた複素数であるから，座標平面では y 座標の符号が反転することに対応し，$\overline{\alpha}$ は α と x 軸対称な点である．同様に，α と原点対称な点は x, y 座標の符号がともに反転するので $-\alpha$ に対応し，y 軸対称移動させた点は，$\overline{\alpha}$ を原点対称に移動させた点であるので $-\overline{\alpha}$ である．



【定理 15： 共役】

α, β を複素数とする．このとき，次が成立する．

(1) $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$
(2) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$
(3) $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$
(4) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$
(5) $\beta \neq 0$ のとき $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$
(6) $\alpha \neq 0$ のとき，n を整数とすると，$(\overline{\alpha})^n = \overline{\alpha^n}$

［証明］

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$（$a, b, c, d$ は整数）とおく．

(1) $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{a - bi} = a + bi = \alpha$ より示された．
(2) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$ であり，
$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$ より示された．
(3) $\overline{\alpha - \beta} = \overline{(a - c) + (b - d)i} = (a - c) - (b - d)i$ であり，
$\overline{\alpha} - \overline{\beta} = (a - bi) - (c - di) = (a - c) - (b - d)i$ より示された．
(4) $\overline{\alpha\beta} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ であり，
$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$ より示された．

(5) まずはじめに，$\overline{\left(\dfrac{1}{\beta}\right)}=\dfrac{1}{\overline{\beta}}\cdots(*)$ を示す．

$$\overline{\left(\frac{1}{\beta}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{a+bi}\right)}=\overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

であり，

$$\frac{1}{\overline{\beta}}=\frac{1}{a-bi}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

であるから，$(*)$ が示された．これを用いると，

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}&=\overline{\left(\alpha\cdot\frac{1}{\beta}\right)}\\&=\overline{\alpha}\cdot\overline{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\quad\text{（(4) より）}\\&=\overline{\alpha}\cdot\frac{1}{\overline{\beta}}\quad\text{（$(*)$ より）}\\&=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\end{aligned}$$

となり示された．

(6) まず，$n=0$ のときは，両辺ともに 1 であるから明らかである．n が自然数であるときに数学的帰納法で示す．$n=1$ のときは明らかである．$n=k$（$k=1,2,3,\ldots$）のとき正しいとする．すなわち，$(\overline{\alpha})^k=\overline{\alpha^k}$ を仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha})^{k+1}&=(\overline{\alpha})^k\cdot\overline{\alpha}\\&=\overline{\alpha^k}\cdot\overline{\alpha}\quad\text{（帰納法の仮定より）}\\&=\overline{\alpha^k\cdot\alpha}\quad\text{（(4) より）}\\&=\overline{\alpha^{k+1}}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも正しく，数学的帰納法によって n が自然数のときは示された．

　ところで，(5) の $(*)$ は，$n=-1$ の場合にこの主張を示している．これを踏まえ，$n=-m$ (m=1,2,3,...) と表されるときには，

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha})^n&=(\overline{\alpha})^{-m}\\&=\{(\overline{\alpha})^m\}^{-1}\\&=(\overline{\alpha^m})^{-1}\quad\text{(m が自然数の場合)}\\&=\overline{(\alpha^m)^{-1}}\quad\text{（$(*)$ より）}\\&=\overline{\alpha^{-m}}\\&=\overline{\alpha^n}\end{aligned}$$

と示される．よって，整数 n に対して主張は成立する．

■

【定理 16： 共役解】

実数係数 n 次方程式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

について，複素数 $x = \alpha$ が解であるならば，$x = \overline{\alpha}$ も解である．

[証明]

$x = \alpha$ が解であることから，

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

が成立する．一方で，

$$\begin{aligned}
&a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_1(\overline{\alpha}) + a_0 \\
&= \overline{a_n} \cdot (\overline{\alpha})^n + \overline{a_{n-1}} \cdot (\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + \overline{a_1} \cdot (\overline{\alpha}) + \overline{a_0} \quad \text{（実数は自身と共役が等しい〈後述}\textbf{定理 18.}\text{〉）} \\
&= \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} \quad \text{（}\textbf{定理 14(6).}\text{）} \\
&= \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} \quad \text{（}\textbf{定理 14(4).}\text{）} \\
&= \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} \quad \text{（}\textbf{定理 14(2).}\text{）} \\
&= \overline{0} = 0
\end{aligned}$$

よって，$\overline{\alpha}$ もまた与えられた方程式の解である．

■

◆ **例 17.** $x^2 + x + 2 = 0$ の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ である．$\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{7}i}{2}$ とすると，$\overline{\alpha} = \dfrac{1 - \sqrt{7}i}{2}$ も解になっている．