7.　実数・純虚数条件

【定理 18： 実部と虚部】

α を複素数とすると，

$$\mathrm{Re}\,\alpha = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}, \quad \mathrm{Im}\,\alpha = \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}$$

［証明］

$\alpha = a+bi\cdots$①（a, b は実数）とおくと，$\overline{\alpha} = a-bi\cdots$② である．①, ② を辺々足すと

$$\alpha+\overline{\alpha} = 2a \quad \therefore \mathrm{Re}\,\alpha = a = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$$

また，① から ② を引くと

$$\alpha-\overline{\alpha} = 2bi \quad \therefore \mathrm{Im}\,\alpha = b = \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}$$

■

定義 19. 複素数 $\alpha = a+bi$（a, b は実数）が，$b \neq 0$ であるとき**虚数**であるという．また，$a=0$ かつ $b \neq 0$（すなわち $a=0$ かつ $\alpha \neq 0$）であるとき**純虚数**であるという．

複素数平面上において，実数は x 軸上にある点であり，虚数は x 軸上にない点のことである．さらに，純虚数は y 軸上の原点以外の点である．

【定理 20： 実数・純虚数条件】

α を複素数とすると，

(1) α が実数である $\iff \alpha = \overline{\alpha}$

(2) α が純虚数である $\iff \alpha = -\overline{\alpha}$ かつ $\alpha \neq 0$

［証明］

(1)

$$\begin{aligned}\alpha\text{が実数である} &\iff \mathrm{Im}\,\alpha = 0 \\ &\iff \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i} = 0 \\ &\iff \alpha-\overline{\alpha} = 0 \\ &\iff \alpha = \overline{\alpha}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\alpha\text{が純虚数である} &\iff \mathrm{Re}\,\alpha = 0 \text{ かつ } \alpha \neq 0 \\ &\iff \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2} = 0; \text{かつ } \alpha \neq 0 \\ &\iff \alpha+\overline{\alpha} = 0 \text{ かつ } \alpha \neq 0 \\ &\iff \alpha = -\overline{\alpha} \text{ かつ } \alpha \neq 0\end{aligned}$$

実数であることは，複素数平面上において x 軸上にあることと同値で，それは x 軸対称移動させても変化しないことと言い換えられる．α を x 軸対称移動させた点は $\overline{\alpha}$ であるから，このことは $\alpha=\overline{\alpha}$ であるということである．

一方で，純虚数であることは，複素数平面上においてが原点を除いた y 軸上にあることと同値で，それは原点でなく，かつ y 軸対称移動させても変化しないことと言い換えられる．α を y 軸対称移動させた点は $-\overline{\alpha}$ であるから，このことは $\alpha\neq 0$ かつ $\alpha=-\overline{\alpha}$ であるということである．