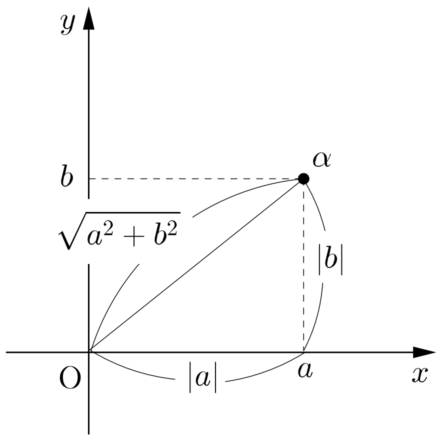
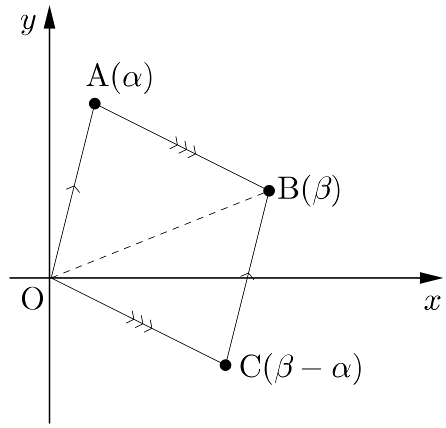
8. 複素数の絶対値

定義 21.
複素数 $\alpha = a + bi$（a, b は実数）に対して，$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ を α の**絶対値**という．

a, b は実数であるから，$|\alpha|$ は 0 以上の実数であることがわかる．さらに，右図のような状況から，三平方の定理を用いることによって α の絶対値が α と原点の距離に他ならないことも直ちにわかる．



【定理 22： 2 点間の距離】
2 点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta)$ 間の距離は，$|\beta - \alpha|$ である．



［証明］
$\mathrm{C}(\beta - \alpha)$ とすると，四角形 OABC が平行四辺形になることから，$\mathrm{AB} = \mathrm{OC}$ である．OC は C の絶対値に他ならず，従って $\mathrm{AB} = |\beta - \alpha|$ である．

■

【定理 23： 絶対値の性質】
α, β を複素数とする．

(1) $|\alpha|^2 = \alpha \cdot \overline{\alpha}$
(2) $|\alpha| = |\overline{\alpha}| = |-\alpha|$
(3) $|\alpha| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$
(4) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
(5) $\beta \neq 0$ のとき，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$
(6) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$（三角不等式）

［証明］
$\alpha = a + bi, \beta = c + di$（$a, b, c, d$ は実数）とおく．

(1) $|\alpha|^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2+b^2$ であり，$\alpha\cdot\overline{\alpha} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ であることから従う．

(2) $|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$，$|\overline{\alpha}| = \sqrt{a^2+(-b)^2}$，$|-\alpha| = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2}$ より従う．

(3) $|\alpha| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Longleftrightarrow a^2+b^2 = 0 \Longleftrightarrow a=b=0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$

(4) (1) 及び**定理 14.**(4) より

$$|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\cdot\overline{\alpha\beta} = \alpha\cdot\beta\cdot\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha}\cdot\beta\overline{\beta} = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2$$

$|\alpha\beta|, |\alpha|\cdot|\beta|$ はともに 0 以上であるから，$|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ である．

(5) (1) 及び**定理 14.**(5) より

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \frac{\alpha}{\beta}\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\alpha\overline{\alpha}}{\beta\overline{\beta}} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}$$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|, |\alpha|\cdot|\beta|$ はともに 0 以上であるから，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ である．

(6) 両辺 0 以上であるから

$$\begin{aligned}
|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta| &\Longleftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \le (|\alpha|+|\beta|)^2 \\
&\Longleftrightarrow (\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)} \le |\alpha|^2+2|\alpha|\cdot|\beta|+|\beta|^2 \quad \text{((1) より)} \\
&\Longleftrightarrow (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) \le |\alpha|^2+2|\alpha\beta|+|\beta|^2 \quad \text{(\textbf{定理 14.}(2) より)} \\
&\Longleftrightarrow |\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2 \le |\alpha|^2+2|\alpha\beta|+|\beta|^2 \quad \text{((1) より)} \\
&\Longleftrightarrow \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta \le 2|\alpha\beta| \\
&\Longleftrightarrow 2(ac+bd) \le 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&\Longleftrightarrow ac+bd \le \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \cdots ①
\end{aligned}$$

従って ① を示せばよい．$ac+bd<0$ であるときは，右辺は 0 以上であるから明らか．$ac+bd \ge 0$ であるときは，① は両辺を 2 乗した

$$(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

と同値で，これは Cauchy-Schwarz の不等式に他ならない．

■

(3) については 10 節でも示すこととなる．一方で，(4) は三角不等式という名前がついている通り，「三角形の二辺の長さの和は，他の一辺の長さより大きい」ことを複素数を用いて表現したものである．実際，右図のように A(α),B(β) として C($\alpha+\beta$) とすると，$|\alpha+\beta| = \mathrm{OC}$ かつ $|\alpha|+|\beta| = \mathrm{OA}+\mathrm{OB} = \mathrm{OA}+\mathrm{AC}$ であるから，三角形の辺の長さの関係を表したものであることが分かるであろう（この方法だと，厳密には三角形ができない場合についても議論が必要である）．