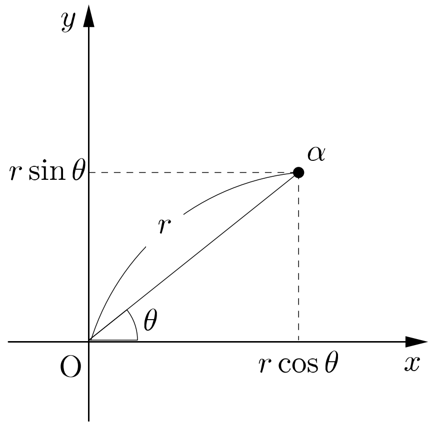
9. 極形式

右図のように，0 でない複素数 $\mathrm{A}(\alpha)$ に対して，$|\alpha|=r$ として，動径 OA を x 軸の正の方向から測った角度を θ とする．このとき，α の x 座標（実部）は $r\cos\theta$ で，α の y 座標（虚部）は $r\sin\theta$ であるから，

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdots①$$

と表される．この表示を α の**極形式**という．



定義 24. 上の説明において，r を α の絶対値，θ を α の**偏角**という．$r=|\alpha|$ とかき，$\theta=\arg\alpha$ とかく．

逆に，原点からの距離 $r>0$ と x 軸の正の方向から測った角度 θ を与えると，① によって複素数 α が一意に定まる．

複素数に対して，絶対値はただ 1 つに定まるが，偏角は 2π の整数倍だけのズレが考えられる．$0\leq\arg\alpha<2\pi$ もしくは $-\pi\leq\arg\alpha<\pi$ の範囲に制限すれば偏角もただ 1 つに定まる．

そのような偏角の 2π の整数倍のズレを考慮し（分枝の取り方という），arg の入った等式は 2π の整数倍のズレを除いて等しいことを意味することとする．

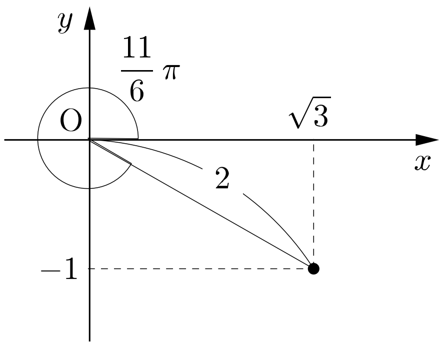
◆ **例 25.** $\alpha=\sqrt{3}-i$ の極形式を求めよう．絶対値は $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$ であり，偏角 θ は

$$2\cos\theta=\sqrt{3},\quad 2\sin\theta=-1$$

を満たす角度で，$\theta=\dfrac{11}{6}\pi$ である．よって，α の極形式は

$$\alpha=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$$

である．



$$\alpha=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

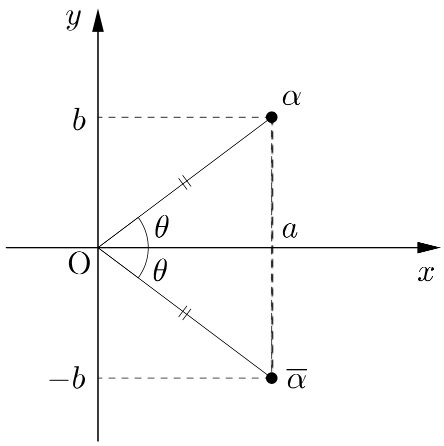
などというように偏角は整数 n を用いて $\theta=\dfrac{11}{6}\pi+2n\pi$ と表される角度のいずれかを用いれば良い．

【定理 26： 共役の極形式】

0 でない複素数 $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$（$r>0$，$\theta$ は実数）に対して，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ の極座標表示は $\overline{\alpha}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ である．

[証明]

$\overline{\alpha}$ は，α の虚部を -1 倍したものなので，絶対値は変わらず偏角が -1 倍となる．



■