$\boxed{問題}$ 7. **実数・純虚数条件**

(1) α, β を複素数とする．$\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$ が実数であることを証明せよ．

(2) z を -1 でない複素数とする．

① $z\overline{z} + 1 \neq 0$ を示せ．（これは $z = -1$ でも成立する）

② $\dfrac{\overline{z}}{1+z}$ が純虚数になる z の条件を求めよ．

---

(1) $\overline{(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)}$

$=\overline{(\alpha\overline{\beta})}+\overline{(\overline{\alpha}\beta)}$

$=\overline{\alpha}\,\overline{\overline{\beta}}+\overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}$

よって，$\overline{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}=\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$

であるから，$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$ は実数である。

(2) ① $z=a+bi$ （a, b：実数）とおくと，

$z\overline{z}+1=(a+bi)(a-bi)+1$

$=a^2+b^2+1 \geqq 1$ $\left(\because\ a^2 \geqq 0,\ b^2 \geqq 0\right)$

したがって，$z\overline{z}+1 \neq 0$.

② $\dfrac{z}{1+z^2}$ が純虚数

$\iff \dfrac{z}{1+z^2}=-\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}$ かつ $\dfrac{z}{1+z^2}\neq 0$

$\iff \dfrac{z}{1+z^2}=-\dfrac{\overline{z}}{\overline{1+z^2}}$ かつ $z\neq 0$

$\iff \dfrac{z}{1+z^2}=-\dfrac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}$ かつ $z\neq 0$

$\iff z(1+\overline{z}^2)=-\overline{z}(1+z^2)$ かつ $z\neq 0$

$\iff z\overline{z}^2+z^2\overline{z}+z+\overline{z}=0$ かつ $z\neq 0$

$\iff (z\overline{z}+1)(z+\overline{z})=0$ かつ $z\neq 0$

$\iff z+\overline{z}=0$ かつ $z\neq 0$

$\iff z$：純虚数.